532818

Rec'd PCT/PTO 26 APR 2005

(12) DEMANDE INTERNATIONALE PUBLIÉE EN VERTU DU TRAITÉ DE COOPÉRATION EN MATIÈRE DE BREVETS (PCT)

(19) **Organisation Mondiale de la Propriété Intellectuelle**
Bureau international

(43) **Date de la publication internationale**
13 mai 2004 (13.05.2004)

PCT

(10) **Numéro de publication internationale**
WO 2004/040512 A2

(51) **Classification internationale des brevets[7] : G06N 5/04**

(21) **Numéro de la demande internationale :** PCT/EP2003/050757

(22) **Date de dépôt international :** 27 octobre 2003 (27.10.2003)

(25) **Langue de dépôt :** français

(26) **Langue de publication :** français

(30) **Données relatives à la priorité :**
02/13542 29 octobre 2002 (29.10.2002) FR

(71) **Déposant** *(pour tous les États désignés sauf US)* : **THALES** [FR/FR]; 45, rue de Villiers, F-92200 Neuilly-sur-Seine (FR).

(72) **Inventeur; et**
(75) **Inventeur/Déposant** *(pour US seulement)* : **LABREUCHE, Christophe** [FR/FR]; THALES Intellectual Property, 31-33, avenue Aristide Briand, F-94117 Arcueil Cedex (FR).

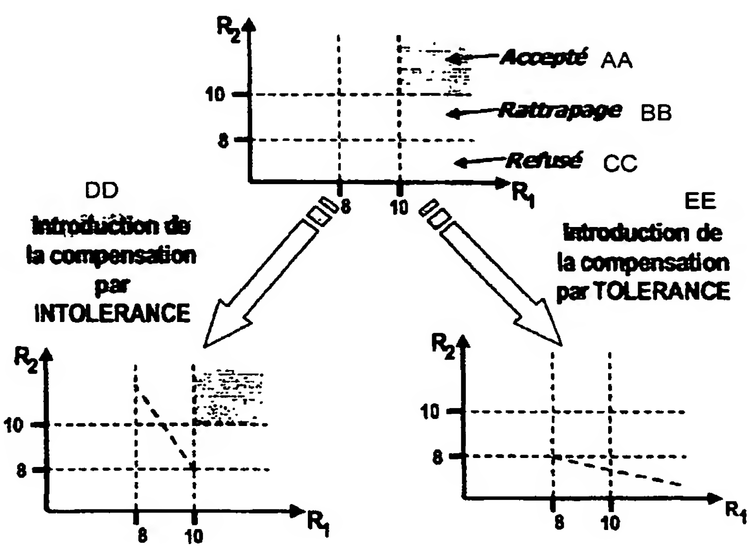
(74) **Mandataire : CHAVERNEFF, Vladimir**; THALES Intellectual Property, 31-33, avenue Aristide Briand, F-94117 Arcueil Cedex (FR).

(81) **États désignés** *(national)* : AE, AG, AL, AM, AT, AU, AZ, BA, BB, BG, BR, BY, BZ, CA, CH, CN, CO, CR, CU, CZ, DE, DK, DM, DZ, EC, EE, EG, ES, FI, GB, GD, GE, GH, GM, HR, HU, ID, IL, IN, IS, JP, KE, KG, KP, KR, KZ, LC, LK, LR, LS, LT, LU, LV, MA, MD, MG, MK, MN, MW, MX, MZ, NI, NO, NZ, OM, PG, PH, PL, PT, RO, RU, SC,

[Suite sur la page suivante]

(54) **Title:** DECISION-MAKING METHOD USED IN THE ABSENCE OF CLEARLY-IDENTIFIABLE RULES

(54) **Titre :** PROCEDE DE PRISE DE DECISION EN L'ABSENCE DE REGLES CLAIREMENT IDENTIFIABLES



AA...ACCEPTED
BB...ADJUSTMENT
CC...REFUSED
DD...INTRODUCTION OF COMPENSATION BY INTOLERANCE
EE...INTRODUCTION OF COMPENSATION BY TOLERANCE

(57) **Abstract:** The invention relates to a decision-making method which is used in the absence of clearly-identifiable rules. The inventive method consists in establishing decision-making rules comprising at least two variables, whereby at least one limit for each of said variables is not strict. The invention is characterised in that it involves: the formal introduction of a compensation condition into the not clearly-identifiable rules; the determination, for each parameter of a compensatory condition, of at least one particular point which belongs to a compensation boundary and which is linked to the parameter; the deduction of the value of the parameters; the application of the set of rules and the deduction of the decision.

(57) **Abrégé :** Le procédé de l'invention est un procédé de prise de décision en l'absence de règles clairement identifiables, selon lequel on établit des règles de prise de décision comportant au moins deux variables pour chacune desquelles au moins une limite n'est pas stricte, et il est caractérisé par le fait que l'on introduit formellement une condition de

[Suite sur la page suivante]

WO 2004/040512 A2

SD, SE, SG, SK, SL, SY, TJ, TM, TN, TR, TT, TZ, UA, UG, US, UZ, VC, VN, YU, ZA, ZM, ZW.

(84) **États désignés** *(régional)* **:** brevet ARIPO (GH, GM, KE, LS, MW, MZ, SD, SL, SZ, TZ, UG, ZM, ZW), brevet eurasien (AM, AZ, BY, KG, KZ, MD, RU, TJ, TM), brevet européen (AT, BE, BG, CH, CY, CZ, DE, DK, EE, ES, FI, FR, GB, GR, HU, IE, IT, LU, MC, NL, PT, RO, SE, SI, SK, TR), brevet OAPI (BF, BJ, CF, CG, CI, CM, GA, GN, GQ, GW, ML, MR, NE, SN, TD, TG).

Publiée :

— *sans rapport de recherche internationale, sera republiée dès réception de ce rapport*

En ce qui concerne les codes à deux lettres et autres abréviations, se référer aux "Notes explicatives relatives aux codes et abréviations" figurant au début de chaque numéro ordinaire de la Gazette du PCT.

compensation dans les règles non clairement identifiables, qu'on détermine pour chaque paramètre d'une condition compensatoire au moins un point particulier appartenant à une frontière de compensation et relié au paramètre, qu'on en déduit la valeur des paramètres, qu'on applique l'ensemble des règles et qu'on en déduit la décision.

PROCEDE DE PRISE DE DECISION EN L'ABSENCE DE REGLES CLAIREMENT IDENTIFIABLES

La présente invention se rapporte à un procédé de prise de décision en l'absence de règles clairement identifiables.

L'approche par règles est très largement utilisée dans de nombreux systèmes experts. Elle permet aux experts de rentrer le plus naturellement possible leur connaissances sous forme de « règles métier ». L'approche par règles permet à l'expert de fournir son expertise directement sous forme explicite et parfaitement claire.

Les arbres de décision sont très utilisés pour modéliser la prise d'une décision parmi un ensemble fini d'alternatives (« alternative » signifiant dans la présente description l'une des possibilités offertes par un choix). Leur gros intérêt est d'être parfaitement compréhensibles par un expert. Un arbre de décision peut se représenter comme un ensemble de règles. La difficulté est de prendre en compte les imprécisions et les incertitudes de la connaissance de l'expert dans ces arbres de décision. Les imprécisions et incertitudes sont classiquement modélisées grâce à l'utilisation de la logique floue. Si l'on considère la règle suivante « Si $R_1 \geq \alpha_1$ et $R_2 \geq \alpha_2$ alors $z \in C$ », alors cela revient à dire que R_1 est supérieur ou égal à α_1, et de même pour R_2 avec α_2. Les imprécisions et incertitudes ne sont pas les seuls phénomènes qui méritent d'être modélisés. D'après la règle précédente, on a $z \in C$ dès que $R_1 \geq \alpha_1$ et $R_2 \geq \alpha_2$. Or, à l'évidence, il se peut qu'il existe de nombreux cas pratiques dans lesquels z devrait aussi appartenir à C lorsque R_1 est légèrement inférieur à α_1 mais que R_2 est suffisamment supérieur à α_2. Dans ce cas, on s'attend effectivement à ce qu'une bonne valeur de la variable R_2 compense une mauvaise valeur de R_1. Il en va évidemment de même entre une bonne valeur de la variable R_1 et une mauvaise valeur de R_2.

Un objet de l'invention est de pouvoir modéliser les phénomènes de compensation.

La difficulté est de prendre en compte dans les arbres de décision les imprécisions et les incertitudes, ainsi que les phénomènes compensatoires.

On reprend la règle « Si $R_1 \geq \alpha_1$ et $R_2 \geq \alpha_2$ alors $z \in C$ ». La prise en compte des incertitudes et imprécisions dans les règles standard se fait classiquement grâce à la logique floue. Cela revient à dire que la condition R_1 supérieur ou égal à α_1 peut être plus ou moins vérifiée (avec un certain degré), et de même pour R_2 et α_2. On introduit alors un ensemble flou V_1 qui n'est rien d'autre qu'une fonction qui, à une valeur de R_1 associe un degré entre 0 et 1. Ce degré vaut 0 (c'est à dire $V_1(R_1)=0$) si la condition $R_1 \geq \alpha_1$ n'est pas du tout satisfaite, et ce degré vaut 1 (c'est à dire $V_1(R_1)=1$) si la condition $R_1 \geq \alpha_1$ est parfaitement satisfaite. Il existe dans la littérature de nombreuses façons de transformer une règle standard en une règle floue. A chaque façon correspond une interprétation de la règle. Par exemple, pour les règles floues dites « à certitude », cela donne : « plus R_1 est supérieur à α_1 et plus R_2 est supérieur à α_2, alors plus il est certain que $z \in C$ ».

On peut écrire la règle précédente sous forme floue, de la façon générique suivante : « Si $V_1(R_1)$ ET $V_2(R_2)$ sont grands , alors $z \in C$ ». Pour modéliser les phénomènes compensatoires, le connecteur ET dans la règle doit être étendu. Dans la littérature, l'extension des connecteurs de conjonction et de disjonction existe. En remplaçant le connecteur ET par un connecteur générique noté $\otimes$, on obtient « Si $V_1(R_1)$, $\otimes V_2(R_2)$ est grand alors $z \in C$ ». Pour modéliser plus particulièrement la compensation, on utilise un connecteur du type moyenne. On écrit alors plus particulièrement « Si $F(V_1(R_1),V_2(R_2))$ est grand alors $z \in C$ », où F est une fonction que l'on va expliciter ci-dessous. La règle floue compensatoire que l'on a décrite avec deux variables dans les prémisses se généralise à un nombre quelconque de variables. Cela donne : « Si $F(V_1(R_1),V_2(R_2),$

$\ldots,V_n(R_n))$ est grand, alors $z \in C$ ». Le nombre $F(V_1(R_1),\ldots,V_n(R_n))$ correspond au degré de compensation entre 0 et 1. Il décrit avec quel degré la compensation a lieu et donc avec quel degré la règle doit être déclenchée. La notion de degré (et en particulier le degré de compensation $F(V_1(R_1),\ldots,V_n(R_n)))$ renvoie à la notion d'échelle unipolaire bornée modélisant une notion dont le contraire n'existe pas et dont le degré admet une valeur maximale, comme c'est le cas par exemple pour la satisfaction. Le degré est donc typiquement modélisé dans une échelle [0,1]. A l'opposé, la notion de compensation s'appuie sur la notion d'échelle bipolaire (modélisant une notion et son contraire, comme par exemple l'attractivité et la répulsion) puisque, dans tout phénomène de compensation, il y a forcément des aspects positifs qui compensent des aspects négatifs. Les fonctions d'utilité $V_i(R_i)$ doivent donc correspondre à de telles échelles. On voit donc que la fonction F a en argument des valeurs appartenant à une échelle bipolaire (les utilités $V_i(R_i)$) et renvoie une valeur appartenant à une échelle unipolaire bornée (le degré de compensation). En conséquence, Il doit donc exister à l'intérieur de F une fonction T permettant de passer d'une échelle bipolaire à une échelle unipolaire bornée. Pour des valeurs quelconques $u_1,\ldots,u_n$ de ses arguments, F s'écrit donc $F(u_1,\ldots,u_n)=T(H(u_1,\ldots,u_n))$, où H est une fonction d'agrégation comme celles utilisées en aide multicritères à la décision. La fonction H modélise la compensation. Elle est dite compensatoire dans le sens où $H(u_1,\ldots,u_n)$ est compris entre la plus petite valeur parmi les u_i et la plus grande valeur parmi les u_i. Un exemple de fonction H est typiquement la somme pondérée : $H(u_1,\ldots,u_n)=\Sigma_{i\in\{1,\ldots,n\}}\, \alpha_i\, u_i$.

Comme détaillé plus loin, dans tout phénomène compensatoire, de bons aspects compensent de mauvais. Les bons aspects sont les variables telles que $V_i(R_i)$ est grand alors que de mauvais aspects sont les variables telles que $V_j(R_j)$ est petit. Typiquement, on a $R_i \geq \alpha_i$ pour les bonnes variables, et $R_j < \alpha_j$ pour les mauvaises variables. Certaines

variables R_j peuvent donc se situer en deçà des seuils α_j pourvu que les autres variables soient suffisamment au-dessus des seuils. On dira alors que la limite α_j n'est pas stricte.

La notion d'arbre de décision flou existe (cf. J.M. Adamo « Fuzzy decision trees », Fuzzy Sets & Systems, Vol. 4, pp. 207-219, 1980). Dans la littérature, la détermination d'arbres de décision flous se fait en général par des techniques d'apprentissage. Ces techniques ne permettent pas d'introduire du flou dans un arbre de décision déjà existant. De plus, elles ne traitent pas les phénomènes compensatoires.

Dans une règle floue standard du type « Si $U_\alpha(x)$ et $U_\beta(y)$ sont grands, alors $z \in C$ », les ensembles flous U_α et U_β sont directement palpables pour un expert, de sorte qu'il sera capable de les déterminer explicitement. Ce n'est plus directement le cas dans les règles compensatoires, puisque les V_i sont perçus uniquement au travers de la fonction F. Il est donc très difficile, voire impossible, à un expert de fournir directement les valeurs des V_i ainsi que de F. C'est pour cela qu'il n'existe pas réellement de méthode permettant de faire cela.

Il existe un certain nombre de procédés relativement classiques en logique floue qui permettent indirectement de modéliser les phénomènes compensatoires. Le premier concerne l'utilisation des règles floues dites « conjonctives » (cf. E.H. Mamdani « Application of fuzzy logic to approximate reasoning using linguistic systems » IEEE Transactions on Computers, N°26, pp. 1182-1191, 1977). Il s'agit de « paver » l'ensemble des valeurs possibles de chaque variable R_i par une suite d'ensembles flous $A_{i,1}, \ldots, A_{i,p}$. On crée alors une règle pour chaque combinaison des ensembles flous : « Si $R_1 \in A_{1,k1}$ et ... et $R_n \in A_{n,kn}$ alors $z \in C$ » pour tout $k_1,\ldots,k_n$. Chaque combinaison des $k_1,\ldots,k_n$ fournit une valeur a priori différente de C. L'approche par règles floues utilisant une fonction d'agrégation F consiste à décrire la compensation globalement grâce à une fonction mathématique, alors que cette approche consiste à décrire la

compensation point par point (c'est-à-dire pour tout n-uplet $k_1,\ldots,k_n$). Le gros inconvénient de cette approche est « l'explosion combinatoire » puisqu'il faut expliciter une règle pour toutes les combinaisons possibles de $k_1,\ldots,k_n$. De plus, les règles conjonctives ont une interprétation qui ne correspond pas à une implication entre les conditions en prémisse et la conclusion, mais juste à l'observation de quelque chose qui s'est produit (cf. D. Dubois & H. Prade, «What are fuzzy rules and how to use them», Fuzzy Sets & Systems, N°84, pp. 169-185, 1996). Cette approche est moins pertinente que celle utilisant la fonction F.

Le second procédé connu est l'interpolation entre règles (cf. D. Dubois & H. Prade, « On fuzzy interpolation », Int. Journal of General Systems, N°28, pp. 103-114, 1999). On considère par exemple deux règles qui s'appliquent sur des valeurs différentes des variables dans les prémisses : « Si $R_1 \in A_1$ et ... et $R_n \in A_n$ alors $z \in C$ » et « Si $R_1 \in B_1$ et ... et $R_n \in B_n$ alors $z \in C'$ ». L'interpolation entre ces deux règles permet créer des règles qui s'appliqueront sur les valeurs intermédiaires entre les A_i et les B_i. La concaténation de toutes ces règles aura un effet similaire à l'approche utilisant une fonction d'agrégation F. Par contre, la façon d'obtenir la règle compensatoire globale est détournée. Les conséquences de l'interpolation peuvent dépasser ce que l'expert souhaitait initialement. Selon l'invention, il est préférable d'aider l'expert à raisonner directement sur la compensation.

Le procédé de prise de décision conforme à l'invention est un procédé selon lequel on établit des règles de prise de décision comportant au moins deux variables pour chacune desquelles au moins une limite n'est pas stricte, et il est caractérisé par le fait que l'on introduit formellement une condition de compensation dans les règles non clairement identifiables, qu'on détermine pour chaque paramètre d'une condition compensatoire au moins un point particulier appartenant à une frontière de compensation et relié au paramètre, qu'on en déduit la valeur des

paramètres, qu'on applique l'ensemble des règles et qu'on en déduit la décision. On notera que le fait qu'une limite ne soit pas stricte signifie que les conditions sur les seuils correspondants peuvent être violées.

Selon une deuxième caractéristique de l'invention, la compensation est de nature binaire, et il n'y a qu'une seule frontière de compensation.

Selon une troisième caractéristique de l'invention, les conditions dans les prémisses sont rendues floues par l'expert, la compensation peut être plus ou moins vérifiée, il y a deux frontières de compensation, l'application des règles permet de calculer un degré de possibilité sur l'ensemble des alternatives possibles, et l'on doit interpréter les distributions de possibilité finales pour en déduire la décision.

Selon une quatrième caractéristique de l'invention, la condition de compensation s'écrit comme l'agrégation par une somme, qui est avantageusement une simple somme non pondérée, de fonctions d'utilité sur chaque variable, les fonctions d'utilité sont affines par morceaux, un expert fournit les abscisses des points délimitant les parties affines, et les paramètres de la condition de compensation sont les ordonnées de ces points.

Selon une cinqième caractéristique de l'invention, l'expert fournit en valeurs relatives par rapport aux valeurs extrêmes les ordonnées des fonctions d'utilité pour tous points délimitant les parties affines hormis les deux points extrêmes et le seuil, l'utilité au seuil est nulle et les paramètres de la condition de compensation sont les ordonnées des fonctions d'utilité pour les points extrêmes.

Selon une sixième caractéristique de l'invention, l'utilité au seuil est nulle et les paramètres de la condition de compensation sont les ordonnées des fonctions d'utilité pour tous points délimitant les parties affines, hormis le seuil.

Selon une septième caractéristique de l'invention, les points particuliers sont tels que toutes leur coordonnées suivant les variables sauf une sont égales à une des valeurs délimitant les parties affines des

fonctions d'utilité, on demande à l'expert de fournir la valeur suivant la coordonnée non fixée de telle sorte que le point particulier se situe exactement sur une frontière de compensation, on détermine un point caractéristique pour toute variable et toute valeur délimitant les parties affines de la fonction d'utilité sur cette variable telle que la coordonnée du point caractéristique suivant la variable soit égale à la valeur et telle que l'ordonnée de cette valeur soit un paramètre (c'est-à-dire soit inconnue), les relations que l'on a sur les points caractéristiques aboutissant à un système d'équations dont les inconnues sont les paramètres, et on résout ce système avec une méthode classique.

Selon une huitième caractéristique de l'invention, l'expert détermine pour chaque variable le type de compensation à laquelle elle appartient, ce qui fournit un ensemble d'équations et d'inéquations auxquelles on ajoute les équations issues des points caractéristiques, et on résout ce système avec une méthode classique.

Selon une neuvième caractéristique de l'invention, toutes les variables correspondent à une compensation du type pour laquelle , pour chaque variable R_i, il existe une valeur de R_i au-delà ou en deça de laquelle plus aucune compensation n'est possible quelle que soit la valeur suivant les autres variables, que l'expert fournit en valeurs relatives par rapport aux valeurs extrêmes les ordonnées des fonctions d'utilité pour tous points délimitant les parties affines hormis les deux points extrêmes et le seuil, que l'utilité au seuil est nulle, que les paramètres de la condition de compensation sont les ordonnées des fonctions d'utilité pour les points extrêmes, que les conditions dans les prémisses sont rendues floues par l'expert, que la compensation peut être plus ou moins vérifiée, que les points caractéristiques sont tels que la composante suivant une variable bien satisfaite corresponde à la valeur maximale suivant cette variable, que la composante suivant une variable mal satisfaite soit libre, que l'on demande à l'expert de fournir la valeur suivant la coordonnée libre (non fixée) de telle sorte que le point particulier se situe exactement sur une

frontière de compensation et que toutes les autres composantes soient fixées aux seuils.

Selon une dixième caractéristique de l'invention, la base de règles correspond à un arbre de décision.

Selon une onzième caractéristique de l'invention, la base de règles correspond à un arbre de décision, et une seule alternative ne peut être parfaitement possible dans la distribution de possibilités finale (c'est l'hypothèse H décrite ci-dessous).

Selon une douzième caractéristique de l'invention, on met en évidence dans l'arbre de décision les couples de conditions complémentaires, y compris les conditions de compensation, on traite les conditions complémentaires en même temps en séparant le noyau de leur ensemble flou par un nombre très petit.

Selon une treizième caractéristique de l'invention, on commence par introduire formellement la compensation, puis on introduit formellement le flou, puis on spécifie les conditions floues non compensatoires, et enfin on spécifie les conditions floues compensatoires.

La présente invention sera mieux comprise à la lecture de la description détaillée d'un mode de mise en œuvre, pris à titre d'exemple non limitatif et illustré par le dessin annexé, sur lequel :

-la figure 1 est un exemple d'arbre de décision simplifié servant à expliquer l'invention,

-la figure 2 est un diagramme tracé dans le plan des deux variables de l'arbre de la figure 1,

-la figure 3 est un diagramme reprenant celui de la figure 2, dans lequel ont été introduites les compensations conformes à l'invention,

-les figures 4 à 6 sont des diagrammes de fonctions floues utilisées par l'invention,

-les figures 7 à 13 sont des diagrammes dans le plan des deux variables d'un arbre de décision, dans lesquels sont introduites diverses compensations, conformément à l'invention, et

-les figures 14 à 16 sont des diagrammmes de fonctions d'utilité mises en œuvre par l'invention.

On va d'abord décrire succinctement les caractéristiques générales du procédé de l'invention. Ainsi, on part de l'écriture d'un arbre de décision sous forme de règles standard. Les phases suivantes décrivent le processus de prise en compte des imprécisions et des incertitudes, ainsi que des phénomènes compensatoires.

- P1 - Introduction de la compensation. L'explicitation de l'arbre de décision sous forme de règles montre que l'on aboutit à une partition de l'espace des variables en différentes zones, chaque zone correspondant aux valeurs des variables amenant à une alternative particulière. L'introduction d'un phénomène de compensation induit une modification de la frontière entre deux zones. Il faut donc déterminer dans un premier temps sur la frontière entre quelles alternatives la compensation porte principalement. Selon l'invention, on détermine dans quelle zone la compensation induit une réduction de domaine. On ajoute alors un terme de compensation en conjonction dans les conditions en prémisses de la règle définissant cette zone. A l'opposé, la zone voisine va s'agrandir de la partie enlevée à la zone précédente. On doit alors ajouter un terme de compensation en disjonction dans les conditions en prémisses de la règle définissant cette zone voisine. Ce terme de compensation correspond au complémentaire du terme initial de compensation.
- P2 - Introduction du flou. Comme dit ci-dessus, les conditions en prémisses de l'arbre de décision forment une partition de l'espace des variables. Le fait que l'on obtienne une partition implique qu'à chaque fois que l'on trouve une condition, on trouve nécessairement son complémentaire quelque part dans le même arbre de décision. Deux conditions sont complémentaires si, quelle que soit la valeur des variables, une et une seule condition parmi

ces deux conditions est parfaitement vraie. Cela correspond à une hypothèse H décrite plus tard. Afin d'introduire du flou, l'invention propose de traiter conjointement chaque paire de conditions complémentaires de telle sorte que l'hypothèse H soit satisfaite. D'autre part, dans les conditions en prémisses des règles, les opérateurs de conjonction et de disjonction sont transformés respectivement en minimum et maximum.

- P3 - Spécification du flou dans les conditions non compensatoires. Afin que l'hypothèse H soit vérifiée, les valeurs pour lesquelles les conditions floues sont parfaitement satisfaites correspondent aux valeurs pour lesquelles les conditions non floues sont satisfaites. Pour déterminer les valeurs pour lesquelles les conditions floues ne sont plus du tout satisfaites, on peut poser des questions à l'expert. Au minimum, il suffit de poser une seule question par condition.
- P4 - Spécification du flou dans les conditions compensatoires. Ceci fait l'objet d'un processus à part décrit ci-dessous.

Il n'est pas nécessaire de réaliser ces étapes dans l'ordre indiqué précédemment. L'ordre décrit ci-dessus est un exemple préféré. Les relations de précédence entre les différentes phases sont : P4 vient après P1 et P2 ; P3 vient après P2. D'autre part, il est tout à fait possible d'introduire du flou mais pas de compensation dans un arbre de décision. Dans ce cas, les phases P2 et P3 suffisent. Il est de même tout à fait possible d'introduire de la compensation sans le flou dans un arbre de décision. Les phases P1 et P4 suffisent alors. On peut en effet utiliser le processus P4 pour spécifier la compensation se trouvant dans un arbre de décision non flou.

Les caractéristiques 10 à 13 de l'invention portent sur l'explication de la compensation dans un arbre de décision. Les caractéristiques 11 à 13 de l'invention s'intéressent plus particulièrement à un arbre de décision dans lequel on veut introduire du flou tout en satisfaisant l'hypothèse H. La caractéristique 12 de l'invention correspond à l'étape P2 et consiste en

particulier à traiter les couples de conditions complémentaires en même temps. La caractéristique 13 de l'invention consiste à utiliser les étapes P1 à P4 pour introduire du flou et de la compensation dans un arbre de décision.

Il est à noter que l'étape P4 décrit à elle seule un processus qui peut être considéré séparément. En effet, P4 fournit un processus d'explicitation d'un phénomène compensatoire dans une règle floue. P4 pris séparément peut donc servir à spécifier la compensation dans une condition du type compensation se trouvant en prémisse d'une règle floue.

Les caractéristiques 1 à 9 de l'invention portent sur l'explicitation de la compensation dans un règle seule, c'est-à-dire l'étape P4 prise seule.

L'originalité du procédé de l'invention porte dans un premier temps sur le processus correspondant à la phase P4 (Spécification des conditions floues compensatoires), et dans un second temps sur le fait d'introduire le flou d'une certaine manière (en considérant les couples de conditions complémentaires) de sorte d'assurer que le résultat (l'alternative choisie) satisfasse certaines propriétés.

Le point délicat dans le processus consiste à formaliser la compensation. Dans l'espace des variables, la compensation floue est caractérisée par trois zones : l'une dans laquelle on compense parfaitement, une autre dans laquelle on ne compense pas du tout, et au milieu une zone dans laquelle on compense un peu avec un degré de compensation compris entre 0 et 1. Pour un point se situant dans la zone intermédiaire, l'expert ne sera pas capable de déterminer le degré avec lequel la compensation est permise pour ce point. On peut par contre demander à l'expert à quelle zone appartient un point. Les points pour lesquels on déduit le plus d'information appartiennent à la frontière entre deux zones. En effet, il est facile de voir que chaque frontière se caractérise comme une certaine courbe de niveau de $H(V_1(R_1),V_2(R_2),\ldots,V_n(R_n))$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de variables $R_1,\ldots,R_n$ pour lesquelles $H(V_1(R_1),V_2(R_2),\ldots,V_n(R_n))$ est égal à

une certaine valeur, alors que le fait d'appartenir à une zone donne juste une inégalité sur $H(V_1(R_1),\ldots,V_n(R_n))$ – ce qui est moins informatif. Le processus consiste donc à demander à l'expert de spécifier un certain nombre de points se situant sur la frontière entre les zones « on compense parfaitement » et « on compense un peu », et sur la frontière entre les zones « on ne compense pas du tout » et « on compense un peu ». La connaissance de ces points permettra de déterminer les paramètres de la compensation.

Afin de déterminer la fonction d'utilité V_i définie sur la variable R_i, on caractérise V_i par un ensemble de points discrets de R_i. Cet ensemble est noté $\Re_i$. Il suffit alors de déterminer la valeur $V_i(x_i)$ de la fonction d'utilité en chaque point x_i de cet ensemble $\Re_i$ pour spécifier entièrement V_i. Par exemple, V_i peut être affine entre ces points.

Le procédé de l'invention consiste à questionner l'expert sur un ensemble de points singuliers de la compensation appartenant à la frontière entre deux zones. Ces points singuliers sont des points dont toutes les coordonnées sauf une appartiennent aux ensembles $\Re_i$. On demande alors à l'expert pour quelle valeur de la dernière variable le point singulier se situe exactement sur la frontière entre deux zones. Un tel point singulier noté $R^i(R_i)$ est tel que pour tout $k \neq i$ sa composante sur la variable k appartient à l'ensemble $\Re_k$, et sa composante sur la variable i vaut R_i. Les valeurs de $R^i(R_i)$ suivant les composantes autres que i sont telles que lorsque R_i varie, le point $R^i(R_i)$ coupe forcément l'une des deux frontières. S'il s'agit de la frontière entre les zones « on compense parfaitement » et « on compense un peu », on obtient cette valeur de R_i en demandant jusqu'à quelle valeur de R_i ou à partir de quelle valeur de R_i – selon que la fonction d'utilité V_i est croissante ou décroissante – l'on compense parfaitement pour le point $R^i(R_i)$. S'il s'agit de la frontière entre les zones « on ne compense pas du tout » et « on compense un peu », on obtient cette valeur de R_i en demandant à partir de quelle valeur de R_i ou

jusqu'à quelle valeur de R_i – selon que la fonction d'utilité V_i est croissante ou décroissante -- l'on ne compense plus du tout pour le point $R^I(R_i)$. Pour chaque variable j et chaque point x_j de $\Re_j$, on cherche un point $R^I(R_i)$, satisfaisant les hypothèses précédentes, tel que sa composante suivant la variable j vaut x_j. Pour la valeur R_i pour laquelle $R^I(R_i)$ se trouve à une frontière, on obtient une équation (correspondant au fait que $H(V_1(R^I(R_i)_1),\ldots,V_n(R^I(R_i)_n))$ est égal à une certaine valeur) dans laquelle se trouve $V_j(x_j)$. En faisant cela pour chaque variable j et chaque point x_j de $\Re_j$, on obtient ainsi un système d'équations que l'on peut résoudre de façon classique.

A ces équations, on peut aussi joindre quelques inégalités portant notamment sur le type de compensation souhaitée. On a en effet identifié trois comportements types de compensation (notés R1, R2 et R3 par la suite). Ces comportements permettent de donner une définition claire aux valeurs clés de chaque variable R_i. Les relations que l'on obtient peuvent être résolues soit directement soit via un programme linéaire standard ou un programme linéaire en nombres entiers.

Comme cela a été indiqué ci-dessus, pour chaque variable j et chaque point x_j de $\Re_j$, on cherche un point $R^I(R_i)$, satisfaisant les hypothèses précédentes, tel que sa composante suivant la variable j vaut x_j. On cherche donc des valeurs de $R^I(R_i)$ sur les composantes autres que i et j de telle sorte que $R^I(R_i)$ coupe au moins l'une des deux courbes de niveau lorsque R_i varie. Dans les cas favorables, on peut fixer les valeurs des composantes de $R^I(R_i)$ en dehors de i et j, à des valeurs dont les utilités sont déjà connues, tout en assurant que $R^I(R_i)$ coupe forcément l'une des deux frontières pour une valeur de R_i. Dans les autres cas, on doit utiliser des valeurs des composantes de $R^I(R_i)$ hors i et j dont on ne connaît pas encore les utilités. On ne peut pas alors être sûr que $R^I(R_i)$ coupe forcément l'une des deux courbes de niveau puisque, justement, cette propriété dépend des utilités suivant les composantes autres que i et j qui

ne sont pas encore connues. Dans ce cas, on peut choisir les autres composantes qui maximisent une sorte de probabilité de croiser une courbe de niveau.

Pour terminer, on va expliquer brièvement comment introduire de la compensation (sans le flou) dans une règle non floue. On fait référence ici à la deuxième caractéristique de l'invention ainsi qu'à celles qui en découlent. Le fait d'aboutir en fin de processus à une décision binaire (« on compense » ou « on ne compense pas ») sans nuance implique qu'il n'y a que deux zones, et donc une seule frontière au lieu de deux comme précédemment. De plus, la fonction T renvoie 1 (dans ce cas, « on compense ») si son argument est supérieur à une certaine valeur, et 0 (dans ce cas, « on ne compense pas ») sinon. On procède alors comme précédemment, mis à part que l'on ne dispose que d'une seule courbe de niveau. De ce fait, comme on a un seul niveau de référence absolu (la valeur de la courbe de niveau), les résultats seront donnés à une homothétie près (par rapport à la valeur). Cela sera suffisant pour pouvoir faire sans ambiguïté possible la comparaison par rapport à cette valeur.

La présente invention sera décrite ci-dessous en référence à un exemple d'arbre de décision. Il est simple, mais représentatif des phénomènes pouvant se produire. L'exemple consiste en un examen de passage. L'examen est composé de deux épreuves. Les résultats suivant les deux épreuves sont notés R_1 et R_2. En fonction des résultats obtenus, on a trois états possibles : *Accepté* (l'examen de passage est réussi et l'élève est accepté), *Rattrapage* (les résultats ne sont pas suffisants pour accepter l'élève du premier coup, mais suffisamment corrects pour l'autoriser à passer un oral de rattrapage), et *Refusé* (l'examen est très mal réussi, et l'élève est refusé). L'arbre de décision représenté en figure 1 indique la situation de l'élève en fonction de ses résultats. Cet arbre de décision stipule que R_1 et R_2 doivent être supérieurs ou égaux à 10. Si ces deux conditions à la fois sont satisfaites, l'élève est accepté. Si non,

on regarde si ces deux résultats à la fois sont supérieurs ou égaux à 8. Dans l'affirmative, l'élève est rattapé, si non, il est refusé.

Dans le plan des variables R_1 et R_2, les zones matérialisant les situations *Accepté*, *Rattrapage* et *Refusé* sont représentées sur la figure 2, qui traduit fidèlement dans ce plan l'arbre de décision de la figure 1.

On va maintenant décrire en détail un processus permettant de prendre en compte les imprécisions, les incertitudes et les phénomènes compensatoires dans les arbres de décision.

Les arbres de décision sont très utilisés pour modéliser la prise d'une décision parmi un ensemble fini d'alternatives $C=\{C_1,\ldots,C_h\}$. Leur gros intérêt est d'être parfaitement compréhensibles par un expert. L'introduction du flou dans un arbre amène, lors du parcours de cet arbre de décision, à ne plus aboutir à une alternative unique C_m mais à une distribution de possibilités $\wp_C$ sur l'ensemble des alternatives possibles. Ainsi, pour chaque alternative $C_m \in C$, on détermine le degré de possibilité $\wp_C(C_m)$ (compris entre 0 et 1) que C_m soit la décision à prendre. L'interprétation de cette distribution de possibilités se fait alors en se basant sur la théorie des possibilités.

Pour introduire dans chaque arbre de décision du flou et de la compensation, l'invention prévoit de partir de l'arbre de décision standard. On va expliquer tout d'abord comment introduire la compensation, et plus précisément la forme que la compensation doit prendre (s'il y a lieu d'introduire de la compensation). On décrira ensuite comment introduire du flou.

On commence par introduire de la compensation dans un arbre non encore rendu flou. Il faut partir de l'écriture d'un arbre de décision sous forme de règles standard donnant les conditions d'attribution de chaque alternative. Pour l'exemple de l'examen, cela donne :

« *Accepté* » si $R_1 \geq 10$ ET $R_2 \geq 10$

« *Rattrapage* » si ($8 \leq R_1 < 10$ ET $R_2 \geq 8$) OU ($R_1 \geq 8$ ET $8 \leq R_2 < 10$)

« *Refusé* » si $R_1<8$ OU $R_2<8$

Comme il est difficile de prendre en compte la compensation sans outil adapté, aucun phénomène de compensation n'est généralement explicité dans les arbres. Il se peut qu'il n'y ait pas lieu d'en introduire. Par contre, les explications ci-dessous se rapportent au cas contraire. L'explicitation de l'arbre de décision sous forme de règles montre bien que l'on aboutit à une partition de l'espace des variables en différentes zones, chaque zone correspondant aux valeurs des variables amenant à une alternative particulière. L'introduction de compensation induit une modification de la frontière entre deux zones. Il faut donc déterminer dans un premier temps sur quelle frontière entre alternatives porte principalement la compensation, et dans un second temps sur quelles variables la compensation s'applique.

On reprend ici l'exemple de l'examen. Les conditions d'acceptation à un examen sont en général strictes et on peut supposer qu'il n'est peut-être pas souhaitable d'introduire de la compensation sur l'alternative « *Accepté* ». Par contre, on peut se demander si un élève doit être refusé dès qu'un résultat est inférieur à 8 même lorsque l'autre résultat est excellent. De même, on peut se demander si un élève qui obtenu la note 8 suivant les deux résultats mérite quand même d'aller en session de rattrapage. Autrement dit, on suppose qu'il est pertinent d'introduire une compensation à la frontière entre les alternatives « *Rattrapage* » et « *Refusé* », et que cela concerne les variables R_1 et R_2. Il va falloir forcément modifier l'ensemble des valeurs de R_1 et R_2 amenant aux alternatives « *Rattrapage* » et « *Refusé* ». La frontière entre ces deux alternatives peut être modifiée de deux façons :

- La première façon consiste à restreindre l'ensemble des valeurs de R_1 et R_2 conduisant à l'alternative « *Rattrapage* ». En l'absence de compensation, les plus mauvais résultats pouvant conduire encore au rattrapage sont $R_1=8$ et $R_2=8$. Par conséquent, dans cette première

façon de faire, un élève qui obtenu la note 8 aux deux résultats ne mérite pas d'aller en session de rattrapage. On est plus exigeant, plus intolérant. On suppose maintenant que le résultat R_1 soit plus important que le résultat R_2. Dans ce cas, on ne tolère une valeur relativement mauvaise de R_1 que si R_2 a une valeur suffisamment bonne. Autrement dit, on attribue l'alternative « *Rattrapage* » si une valeur plutôt bonne du résultat R_2 (c'est-à-dire $R_2 \geq 8$) compense une valeur relativement mauvaise du résultat R_1 (c'est-à-dire par exemple $8 \leq R_1 < 10$). Bien sûr, il existe d'autres manières de restreindre l'ensemble des valeurs de R_1 et R_2 amenant à l'alternative « *Rattrapage* ».

- La seconde façon consiste à étendre l'ensemble des valeurs de R_1 et R_2 amenant à l'alternative « *Rattrapage* ». Supposons que le résultat R_1 soit plus important que le résultat R_2. On décide alors de rattraper une mauvaise valeur de R_2 (c'est-à-dire $R_2<8$) lorsque R_1 est suffisamment bon. On est moins exigeant, et plus tolérant. Autrement dit, on attribue l'alternative « *Rattrapage* » si une plutôt bonne valeur du résultat R_1 (c'est-à-dire $R_1 \geq 8$) compense une mauvaise valeur du résultat R_2 (c'est-à-dire $R_2<8$). Ceci n'est qu'une manière d'étendre l'ensemble des valeurs de R_1 et R_2 amenant à l'alternative « *Rattrapage* ».

La figure 3 montre ces deux façons de faire.

Ces deux façons d'introduire de la compensation sont très différentes. Choisir le type revient à savoir si toutes les valeurs de R_1 et R_2 conduisant à l'alternative « *Rattrapage* » dans l'arbre de décision initial méritent vraiment d'attribuer cette alternative. Pour déterminer la bonne façon de faire, on peut poser la question suivante :

Si R_1=8 et R_2=8, estimez-vous vraiment que l'alternative « *Rattrapage* » mérite d'être attribuée ?

Cela revient à demander si les plus mauvaises valeurs des variables R_i amenant à l'alternative dans l'arbre de décision initial méritent vraiment d'aboutir à cette alternative. Si la réponse est positive, c'est la seconde façon de faire qui est la bonne.

Il est aussi possible de mélanger les deux façons de faire précédentes en restreignant d'un certain coté les valeurs de R_1 et R_2 conduisant à l'alternative « *Rattrapage* », et en étendant d'un autre coté R_1 et R_2 conduisant à l'alternative « *Rattrapage* ».

On va d'abord examiner le cas de l'introduction de la compensation par restriction (intolérance)

La compensation restreint ici les valeurs possibles conduisant à l'alternative « *Rattrapage* ». Cela signifie que la compensation est une condition qui vient en plus des conditions déjà existantes. Prenons l'exemple de l'examen. La condition d'attribution de l'alternative « *Rattrapage* » sans compensation est :

« *Rattrapage* » si ($8 \leq R_1 < 10$ ET $R_2 \geq 8$) OU ($R_1 \geq 8$ ET $8 \leq R_2 < 10$)

La compensation décrite précédemment revient à restreindre la condition $8 \leq R_1 < 10$ et $R_2 \geq 8$. Afin que les deux conditions ne présentent pas d'intersection entre elles, on réécrit cette règle :

« *Rattrapage* » si ($8 \leq R_1 < 10$ ET $R_2 \geq 8$) OU ($R_1 \geq 10$ ET $8 \leq R_2 < 10$)

Comme on restreint les valeurs conduisant à l'alternative « *Rattrapage* », cela signifie tout simplement que l'on ajoute une condition supplémentaire à la condition « $8 \leq R_1 < 10$ et $R_2 \geq 8$ » et que cette condition porte justement sur la compensation :

« *Rattrapage* » si ($8 \leq R_1 < 10$ ET $R_2 \geq 8$ ET R_2 compense R_1)
OU ($R_1 \geq 10$ ET $8 \leq R_2 < 10$)

Sans compensation, la condition d'attribution de l'alternative « *Refusé* » est :

« *Refusé* » si $R_1 < 8$ OU $R_2 < 8$

Avec l'introduction de la compensation par restriction sur l'alternative « *Rattrapage* », on étend les conditions d'attribution de l'alternative « *Refusé* ». Autrement dit, en plus des conditions précédentes, l'alternative « *Refusé* » est aussi attribuée pour les valeurs qui ne sont plus attribuées à l'alternative « *Rattrapage* » lorsque la compensation a été introduite. Ce sont les valeurs satisfaisant les conditions d'attribution de l'alternative « *Rattrapage* » sans compensation pour lesquelles la compensation ne doit pas se produire :

$8 \leq R_1 < 10$ ET $R_2 \geq 8$ ET R_2 ne compense pas R_1

Donc, dans le cas de compensation, on a

« *Refusé* » si $R_1 < 8$ OU $R_2 < 8$

OU ($8 \leq R_1 < 10$ et $R_2 \geq 8$ et R_2 ne compense pas R_1)

Les conditions « R_2 compense R_1 » et « R_2 ne compense pas R_1 » sont complémentaires.

On examine maintenant les cas de l'Introduction de la compensation par extension (tolérance).

La compensation étend ici les valeurs possibles amenant à l'alternative « *Rattrapage* ». Il est plus facile d'expliciter d'abord l'alternative pour laquelle on restreint le domaine. Il s'agit de l'alternative « *Refusé* ». Sans compensation, la condition d'attribution de l'alternative « *Refusé* » est :

« *Refusé* » si $R_1 < 8$ OU $R_2 < 8$

On vient restreindre la condition « $R_2 < 8$ ». On rajoute donc la condition de compensation à la condition « $R_2 < 8$ », comme précédemment :

« *Refusé* » si $R_1 < 8$ OU ($R_2 < 8$ ET R_1 ne compense pas R_2)

La condition de compensation est ici « R_1 ne compense pas R_2 ». Le terme de « compensation » a une connotation positive. Le fait de pouvoir compenser doit donc aboutir à une conclusion positive. Parmi les deux alternatives « *Rattrapage* » et « *Refusé* », c'est l'attribution de l'alternative « *Rattrapage* » qui est la plus positive. Ainsi, on parle de compensation pour arriver à l'alternative « *Rattrapage* » et de non-compensation pour aboutir à

l'alternative « *Refusé* ». C'est pour cela que la condition de compensation fait référence à « ne compensent pas ».

Les conditions d'attribution de l'autre alternative s'obtiennent comme précédemment . On a donc l'alternative « *Rattrapage* » si les conditions d'attribution de l'alternative « *Rattrapage* » sans compensation sont satisfaites ou bien si on a défaut de non-compensation dans les conditions d'attribution de l'alternative « *Refusé* » :

« *Rattrapage* » si ($8 \leq R_1 < 10$ ET $R_2 \geq 8$) OU ($R_1 \geq 8$ ET $8 \leq R_2 < 10$) OU ($R_2 < 8$ ET R_1 compense R_2)

On examine maintenant le cas de l'Introduction du flou dans un arbre de décision.

Il faut partir de l'écriture d'un arbre de décision sous forme de règles standard, avec, de préférence, déjà, introduction de la compensation.

Le fait de raisonner sur des arbres de décision apporte une propriété intéressante. En effet, dans un arbre de décision, on connaît l'alternative attribuée pour toutes les valeurs possibles suivant les variables. De plus, on dispose explicitement des conditions d'attribution de chaque alternative. Il s'avère donc que les domaines dans lesquels chaque alternative est attribuée forment une partition de l'espace des variables. Cela implique qu'à chaque fois que l'on trouve une condition, on trouve nécessairement son complémentaire quelque part dans le même arbre de décision. Par exemple, $R_1 \geq 10$ avec $R_1 < 10$.

Tout d'abord, on examine le cas de conditions standard. L'introduction du flou va consister à rendre floues les conditions. Au lieu de considérer que la condition $R_1 < 10$ est soit vraie soit fausse, on définit un degré de validité sur la condition. Pour une condition R, on notera dans la suite U(R) le degré de validité sur la condition R. U(R)=1 si la condition R est parfaitement satisfaite, et U(R)=0 si la condition R n'est pas du tout satisfaite. Par exemple, $U(R_1<10)$ est le degré de validité de la condition $R_1<10$ d'après la valeur de R_1.

Il faut donc définir pour chaque condition un degré de validité pour la condition et aussi pour son complémentaire. En logique standard, deux conditions R et T sont complémentaires si on a soit R soit T qui est vrai. Dans la théorie des possibilités, cette condition devient :

Hypothèse H : **max(U(R) , U(T)) = 1. De plus, on a soit U(R)=1, soit U(T)=1.**

Cette condition implique que parmi les deux conditions R et T, l'une est toujours parfaitement satisfaite. De plus, elles ne peuvent pas être parfaitement satisfaites en même temps. Plusieurs façons de satisfaire l'hypothèse H sont possibles. On en décrit une pour l'exemple des conditions complémentaires $R_1 \geq 10$ et $R_1 < 10$:

- La condition $R_1 \geq 10$ est parfaitement satisfaite dès que $R_1 \geq 10$. Elle n'est plus du tout satisfaite lorsque R_1 est *très inférieur* à 10. $U(R_1 \geq 10)$ a donc la forme donnée sur la figure 4.
- La condition $R_1 < 10$ est parfaitement satisfaite dès que $R_1 < 10$. Ainsi, on doit avoir $U(R_1 < 10) < 1$ pour $R_1 = 10$. De ce fait, pour $R_1 = 10$, seule la condition $R_1 \geq 10$ sera parfaitement satisfaite. Pour vérifier ces conditions, on impose que $U(R_1 < 10)$ vaille 1 si et seulement si $R_1 \leq 10 - \varepsilon$, où ε est une valeur très petite. Pour les valeurs $10 - \varepsilon < R_1 < 10$, aucune des deux conditions $R_1 \geq 10$ et $R_1 < 10$ n'est parfaitement vérifiée. Ce sont les seules valeurs de R_1 pour lesquelles la propriété H n'est pas vérifiée.

  En pratique, ε devra être inférieur à la précision numérique sur la variable R_1. En procédant ainsi, comme la valeur $R_1 = 10$ est atteignable, on est sûr que les valeurs $10 - \varepsilon < R_1 < 10$ ne sont pas atteignables numériquement. Par conséquent, la propriété H est vérifiée pour toutes les valeurs atteignables de R_1.

Une fois les différentes utilités définies, on obtient simplement le degré de possibilité sur les différentes conditions apparaissant dans l'arbre de décision. Lorsqu'il y a plusieurs conditions en prémisses composées avec

les opérateurs ET et OU, on fait de même en remplaçant ET par un minimum (noté $\wedge$) et OU par un maximum (noté $\vee$). Cela donne ainsi pour l'exemple de l'examen en l'absence de compensation :

$$\wp(\mathit{Accept\acute{e}}) = U(R_1 \geq 10) \wedge U(R_2 \geq 10)$$

$$\wp(\mathit{Rattrapage}) = (U(R_1 \geq 8) \wedge U(R_1 < 10) \wedge U(R_2 \geq 8)) \vee (U(R_1 \geq 8) \wedge U(R_2 \geq 8) \wedge U(R_2 < 10))$$

$$\wp(\mathit{Refus\acute{e}}) = U(R_1 < 8) \vee U(R_2 < 8)$$

où $\wp$(Accepté), $\wp$(Rattrapage) et $\wp$(Refusé) sont les degrés de possibilité associés aux trois alternatives possibles.

On vient donc de montrer que l'introduction du flou dans les arbres de décision revient à rendre floue chaque condition, le reste du travail étant trivial.

Le fait de raisonner conjointement sur une condition et son complémentaire assure que la condition H est vérifiée.

On examine maintenant le cas de conditions de compensation. Les conditions de compensation sont du type « R_2 compense R_1 » et « R_2 ne compense pas R_1 ». On remarque que ces conditions sont complémentaires. On va donc procéder exactement de la même manière que précédemment. On va examiner d'abord le cas d'une expression d'une condition floue du type compensation. On veut spécifier l'expression de l'utilité $U(R_2$ compense $R_1)$ d'une condition de compensation du type « R_2 compense R_1 ». On se place dans le cadre très général où les variables à prendre en compte dans la compensation sont $R_1,\ldots,R_n$. On note $N=\{1,\ldots,n\}$ et $R=(R_1,\ldots,R_n)$. Par R_{-i}, on entend le vecteur R privé de sa $i^{\text{ième}}$ composante, c'est-à-dire $(R_1,\ldots, R_{i-1}, R_{i+1},\ldots,R_n)$. Pour déterminer si la compensation doit être attribuée ou non, on calcule une utilité $U(R)$ qui agrège des utilités partielles $V_i(R_i)$ suivant les différentes variables. $U(R)$ s'écrit alors sous la forme $U(R)=H(V_1(R_1),\ldots, V_1(R_1))$, où H est une fonction d'agrégation. Comme on désire modéliser la compensation, H est typiquement une somme pondérée $H(u) = \Sigma_{i\in\{1,\ldots,n\}}\ \alpha_i\, u_i$. Cela donne $U(R)=\Sigma_{i\in\{1,\ldots,n\}}\ \alpha_i\, V_i(R_i)$. Dans la compensation, certaines

variables compensent d'autres variables. Cela signifie que les variables qui compensent ont des valeurs satisfaisantes alors que les variables compensées ont des valeurs non satisfaisantes. On voit donc que les utilités V_i doivent traduire aussi bien des valeurs satisfaisantes que des valeurs non satisfaisantes. De plus, l'élément neutre (ni bon ni mauvais) existe. Il correspond à un seuil noté s_i sur la variable i. On voit donc que les utilités V_i ont la signification d'une échelle bipolaire de ratio dans laquelle les valeurs positives correspondent aux valeurs satisfaisantes, les valeurs négatives correspondent aux valeurs non satisfaisantes, et la valeur 0 correspond à l'élément neutre (le seuil). On a $V_i(s_i)=0$. Lorsque les valeurs suivant toutes les variables sont satisfaisantes (c'est-à-dire au-dessus des seuils), alors on compense bien sûr parfaitement, puisqu'il n'y a aucune valeur non satisfaisante susceptible d'empêcher ou d'atténuer la compensation. Dans ce cas, comme tous les $V_i(R_i)$ sont positifs, l'utilité globale U(R) est strictement positive. Lorsque toutes les variables sont égales aux seuils, alors on compense également parfaitement. On a $U(s_1,\ldots,s_n)=0$. Par contre, si toutes les variables sauf une sont égales aux seuils et que cette variable est non satisfaisante, alors on ne compense plus parfaitement. Dans ce cas, l'utilité de cette variable est négative et les autres utilités sont nulles. Comme H est une fonction compensatoire, sa valeur est comprise entre la plus petite valeur parmi ses arguments et la plus grande. On en déduit que U(R) est négatif dans ce cas. On voit donc que la valeur U(R)=0 est la plus petite valeur à partir de laquelle on compense parfaitement. Autrement dit, on compense parfaitement si et seulement si $U(R)\geq 0$. De même, en dessous d'une certaine valeur négative, on ne compensera plus du tout. Par contre, il n'y a aucune raison de prendre une valeur particulière ici. On choisit arbitrairement la valeur –1. Donc on ne compense pas du tout si et seulement si $U(R)\leq -1$. Lorsque $-1<U(R)<0$, on compense un peu.

On remarque dans l'expression de U(R) que V_i est toujours présent dans le produit $\alpha_i V_i$. Or, contrairement aux ensembles flous sur les conditions dans

les règles floues non compensatoires, V_i ne comporte pas de niveau de référence absolu, mis à part le seuil s_i permettant de normaliser V_i. D'ailleurs, on a choisi arbitrairement la valeur –1 comme limite de « on ne compense pas du tout » puisque justement il n'est pas possible de normaliser V_i. Il n'est donc pas pertinent de séparer le poids α_i de V_i. Pour cette raison, dans la suite, le produit $\alpha_i V_i$ sera dénoté simplement par V_i. Cela signifie que le poids α_i est inclus dans V_i. En conséquence, dans la suite, U(R) sera égal à $\Sigma_{i\in\{1,\ldots,n\}} V_i(R_i)$. Comme précédemment, on compense parfaitement si $U(R)\geq 0$, et on ne compense plus du tout si $U(R)\leq -1$.

On doit transformer la valeur fournie par U(R) pour déterminer un degré de compensation compris entre 0 et 1. On applique alors une fonction T à U(R). Ainsi, le degré de compensation vaudra T(U(R)). D'après ce qui précède, on compense parfaitement si $U(R)\geq 0$. Donc, comme le degré de compensation vaut 1 lorsque l'on compense parfaitement, $T(u)=1$ si $u\geq 0$. De plus, on ne compense pas du tout si $U(R)\leq -1$. Donc, comme le degré de compensation vaut 0 lorsque l'on ne compense pas du tout, $T(u)=0$ si $u\leq -1$. La fonction T est donnée en figure 5. Donc l'utilité de la condition de compensation est U(compensation dans $R_1,\ldots,R_n$) = T(U(R)).

La condition complémentaire de « compensation dans $R_1,\ldots,R_n$ » est « non compensation dans $R_1,\ldots,R_n$ ». L'utilité de la condition complémentaire est simplement U(non compensation dans $R_1,\ldots,R_n$) = T'(U(R)), où les deux fonctions T et T' doivent être complémentaires l'une de l'autre au sens de la condition H. Il y a donc un ε qui sépare le noyau de T et T' (c'est-à-dire les valeurs de u telles que $T(u)=1$ et les valeurs de u telles que $T'(u)=1$), comme le montre la figure 5.

On va maintenant examiner le cas de l'Introduction de la compensation par restriction (intolérance). On reprend l'exemple de l'examen. Les conditions d'attribution des alternatives « *Rattrapage* » et « *Refusé* » sont :

« *Rattrapage* » si ($8 \leq R_1 < 10$ ET $R_2 \geq 8$ ET R_2 compense R_1)

OU ($R_1 \geq 10$ ET $8 \leq R_2 < 10$)

« *Refusé* » si $R_1 < 8$ OU $R_2 < 8$ OU ($8 \leq R_1 < 10$ et $R_2 \geq 8$ et R_2 ne compense pas R_1)

Les conditions « R_2 compense R_1 » et « R_2 ne compense pas R_1 » sont complémentaires. Pour introduire du flou dans ces conditions, on procède comme décrit précédemment, c'est-à-dire en remplaçant ET par $\wedge$ et OU par $\vee$:

$$\wp(\textit{Rattrapage}) = (\, U(R_1 \geq 8) \wedge U(R_1 < 10) \wedge U(R_2 \geq 8) \wedge U(R_2 \text{ compense } R_1)\,)$$
$$\vee\ (\, U(R_1 \geq 10) \wedge U(R_2 \geq 8)\ U(R_2 < 10)\,)$$

Dans le terme « $U(R_1 \geq 8) \wedge U(R_1 < 10) \wedge U(R_2 \geq 8) \wedge U(R_2$ compense $R_1)$ », les trois premières conditions permettent de fixer les limites de la compensation, cette dernière étant spécifiée au-delà de ces conditions. Les trois premières conditions assurent le fait que le degré de possibilité $\wp$(*Rattrapage*) soit graduel. La dernière condition se concentre sur la compensation et ne s'intéresse pas aux transitions lisses en dehors de ces trois conditions. On procède de la même manière pour l'alternative « *Refusé* » :

$$\wp(\textit{Refusé}) = U(R_1 < 8) \vee U(R_2 < 8) \vee (\, U(R_1 \geq 8) \wedge U(R_1 < 10) \wedge U(R_2 \geq 8) \wedge U(R_2 \text{ ne compense pas } R_1)\,)$$

D'après ce qui a été vu précédemment, on a :

$$U(R_2 \text{ compense } R_1) = T(V_1(R_1) + V_2(R_2))$$

et

$$U(R_2 \text{ ne compense pas } R_1) = T'(\, V_1(R_1) + V_2(R_2))$$

Dans le cas de l'Introduction de la compensation par extension (tolérance), on procède exactement de la même manière. On va voir ce que cela donne sur l'exemple de l'examen. Les conditions d'attribution de l'alternative « *Rattrapage* » et « *Refusé* » sont :

« *Rattrapage* » si $(8 \le R_1 < 10$ ET $R_2 \ge 8)$ OU $(R_1 \ge 8$ ET $8 \le R_2 < 10)$ OU ($R_2 < 8$ ET R_1 compense R_2)

« *Refusé* » si $R_1 < 8$ OU ($R_2 < 8$ ET R_1 ne compense pas R_2)

L'introduction du flou donne alors :

$\wp$(*Rattrapage*) = ($U(R_1 \ge 8) \wedge U(R_1 < 10) \wedge U(R_2 \ge 8) \wedge U(R_2$ compense $R_1)$) $\vee$ ($U(R_1 \ge 8) \wedge U(R_2 \ge 8)$ $U(R_2 < 10)$) $\vee$ ($U(R_2 < 8) \wedge U(R_1$ compense $R_2)$)

$\wp$(*Refusé*) = $U(R_1 < 8) \vee$ ($U(R_2 < 8) \wedge U(R_1$ ne compense pas $R_2)$)

où :

$$U(R_1 \text{ compense } R_2) = T(V_1(R_1) + V_2(R_2))$$

et :

$$U(R_1 \text{ ne compense pas } R_2) = T'(V_1(R_1) + V_2(R_2))$$

On va expliciter maintenant la manière dont les ensembles flous doivent être spécifiés dans une condition non compensatoire.

Pour une condition R, afin de satisfaire l'hypothèse H, on a $U(R)=1$ lorsque la condition R est vérifiée au sens standard (non flou). On a $U(R)=0$ lorsque la condition R n'est plus du tout satisfaite. On demande à l'expert de donner le(s) point(s) limite(s) pour le(s)quel(s) R n'est plus du tout satisfaite. Ce(s) point(s) limite(s) peut (peuvent) aussi être demandé(s) au travers des conséquences du fait que $U(R)=0$ dans l'arbre de décision.

On va prendre le cas de $U(R_1 \ge 10)$. Bien souvent, $U(R_1 \ge 10)$ sera définie par trois tronçons de droites : $U(R_1 \ge 10)=1$ si $R_1 \ge 10$, $U(R_1 \ge 10)=0$ si $R_1 < R_{1,\ast}$, et $U(R_1 \ge 10)$ est affine au milieu. Dans ce cas, il suffit donc de fournir une unique valeur $R_{1,\ast}$. Il s'agit de la valeur de R_1 en dessous de

laquelle $U(R_1 \geq 10)$ est tout le temps nul. Pour obtenir la valeur de $R_{1,\bullet}$, on peut demander à l'expert :

En dessous de quelle valeur de R_1^N, estimez-vous que la condition $R_1 \geq 10$ n'est pas du tout satisfaite ?

Pour rendre cela encore plus concret pour l'expert, on peut se ramener à une conséquence sur la conclusion du fait que $U(R_1 \geq 10)=0$. Comme $\wp$(*Accepté*) = $U(R_1 \geq 10) \wedge U(R_2 \geq 10)$, le fait que $U(R_1 \geq 10)=0$ implique que l'alternative « *Accepté* » est impossible. On peut alors poser la question suivante à l'expert :

En dessous de quelle valeur de R_1, estimez-vous que l'alternative « *Accepté* » ne doit plus du tout être attribuée ?

Lorsque le lien entre la condition que l'on cherche à spécifier et l'alternative est plus complexe, il faut imposer la valeur des autres conditions de sorte que le fait que la condition ne soit pas du tout vérifiée implique que l'alternative ne soit plus du tout possible. On pose alors une question à l'expert faisant référence aux hypothèses sur les autres conditions.

On voit donc que l'expert peut ne répondre qu'à une seule question par condition pour introduire du flou (première courbe de la figure 6). Par contre, rien n'oblige à prendre $U(R_1 \geq 10)$ simplement affine entre $R_1 = R_{1,\bullet}$ et $R_1=10$. Ceci est nécessaire lorsque le comportement entre $R_{1,\bullet}$ et 10 est non linéaire. $U(R_1 \geq 10)$ s'interprétant comme la possibilité sur l'alternative « *Accepté* » lorsque $U(R_2 \geq 10)=1$, il se peut par exemple que l'alternative « *Accepté* » soit encore quasiment impossible lorsque R_1 est un peu supérieur à $R_{1,\bullet}$, alors que l'alternative « *Accepté* » ne soit plus du tout parfaitement possible lorsque R_1 est légèrement inférieur à 10, comme c'est le cas pour la seconde courbe de la figure 6. Dans de tels cas, l'invention prévoit de construire $U(R_1 \geq 10)$ comme une fonction affine par morceaux et définie par quelques points entre $R_{1,\bullet}$ et 10. La valeur de $U(R_1 \geq 10)$ pour ces points est déterminée en utilisant une méthode issue de la théorie du mesurage et permettant de construire une échelle de différence. Une telle

échelle est donnée à une translation et une homothétie près. Ces deux degrés de liberté sont fixés par les deux conditions $U(R_1 \geq 10)=0$ lorsque $R_1=R_{1,\blacklozenge}$ et $U(R_1 \geq 10)=1$ lorsque $R_1=10$.

Concernant la condition $U(R_1<10)$, la valeur à partir de laquelle la condition $R_1<10$ n'est plus du tout vérifiée est notée $R_1^{\blacklozenge}$.

On va examiner maintenant les comportements types de compensation. Soit $N=\{1,\ldots,n\}$ l'ensemble des variables à prendre en compte dans la compensation. La somme pondérée caractérisant la compensation s'écrit $U(R)=\Sigma_{i\in\{1,\ldots,n\}} V_i(R_i)$, avec la notation $R=(R_1,\ldots,R_n)$. Par $R_{\neg i}$, on entend le vecteur R privé de sa $i^{ième}$ composante, c'est-à-dire $(R_1,\ldots, R_{i-1}, R_{i+1},\ldots,R_n)$. On compense parfaitement si $U(R)\geq 0$, et on ne compense pas du tout si $U(R)\leq -1$. On va spécifier un peu plus les fonctions d'utilité V_i. Pour des raisons pratiques, on suppose que les fonctions d'utilité V_i sont bornées. Ainsi, V_i admet une valeur maximale V_i^* atteinte en un point R_i^* : $V_i(R_i^*)=V_i^*$. De même, V_i admet une valeur minimale $V_{i,**}$ atteinte en un point $V_{i,**}$: $V_i(R_{i,**})=V_{i,**}$. Le comportement de V_i entre $R_{i,**}$ et R_i^* n'est pas spécifié pour l'instant, mis à part que $V_i(s_i)=0$.

Le vecteur $(s_1,\ldots,s_n)$ appartient à la courbe de niveau 0 de U puisque $U(s_1,\ldots,s_n)=0$. On cherche à déterminer les limites sur chaque variable des courbes de niveau 0 et –1. On commence par la courbe de niveau 0. Soit $i\in N$. On désire savoir si, en dessous d'une certaine mauvaise valeur de cette variable R_i, il ne sera plus jamais possible de la compenser parfaitement. On cherche la valeur $R_{i,\#}$ de R_i (si elle existe) pour laquelle pour tout R_i tel que $V_i(R_i)<V_i(R_{i,\#})$ et pour tout $R_{\neg i}$, on a $U(R)<0$, et pour laquelle pour tout R_i tel que $V_i(R_i)\geq V_i(R_{i,\#})$, il existe $R_{\neg i}$ tel que $U(R)\geq 0$. On cherche donc la valeur de R_i avec $V_i(R_i)$ la plus négative possible telle que l'on compense encore parfaitement. On cherche donc :

$$\mathrm{Min}\ \{ V_i(R_i)\ ,\ \exists\ R_{\neg i} \text{ tel que } U(R) \geq 0 \}$$

On a $U(R) \leq V_i(R_i) + \sum_{j \in N \setminus i} V_j^*$. Donc si $U(R) \geq 0$, alors nécessairement $U(R_i, R_{-i}^*) \geq 0$, où $R_{-i}^* = (R_1^*, \ldots, R_{i-1}^*, R_{i+1}^*, \ldots, R_n^*)$. Donc, le minimum précédent vaut :

$$\mathrm{Min}\,\{ V_i(R_i)\,,\ V_i(R_i) + \sum_{j \in N \setminus i} V_j^* \geq 0 \}$$

Si ce minimum existe, alors il est forcément atteint en $R_i = R_{i,\#}$ satisfaisant :

$$V_i(R_{i,\#}) + \sum_{j \in N \setminus i} V_j^* = 0$$

Il est facile de voir que $R_{i,\#}$ peut très bien être égal à $R_{i,\leftrightarrow}$. Donc, $V_i(R_{i,\#})$ peut atteindre la valeur $V_{i,\leftrightarrow}$. D'où $V_i(R_{i,\#}) \geq V_{i,\leftrightarrow}$. En remplaçant cette condition dans la relation satisfaite par $R_{i,\#}$, on en déduit que le minimum existe et est atteint si et seulement si :

$$V_{i,\leftrightarrow} + \sum_{j \in N \setminus i} V_j^* \leq 0$$

Si cette condition n'est pas vérifiée, alors on peut compenser parfaitement, même pour des valeurs infinies de R_i avec $V_i(R_i) \leq 0$.

Cas où $V_{i,\leftrightarrow} + \sum_{j \in N \setminus i} V_j^* \leq 0$ (avec V_i décroissant) : ce cas est illustré en figure 7.

Cas où $V_{i,\leftrightarrow} + \sum_{j \in N \setminus i} V_j^* > 0$ (avec V_i décroissant) : ce cas est illustré en figure 8

On va maintenant examiner les caractéristiques de la courbe de niveau −1. Soit $i \in N$. On désire savoir si, à partir d'une certaine mauvaise valeur de cette variable R_i, il ne sera plus jamais possible de la compenser au moins un peu. On cherche la valeur $R_{i,\$}$ de R_i (si elle existe) pour laquelle pour tout R_i tel que $V_i(R_i) \leq V_i(R_{i,\#})$ et pour tout R_{-i}, on a $U(R) \leq -1$, et pour laquelle pour tout R_i tel que $V_i(R_i) > V_i(R_{i,\#})$ il existe R_{-i} tel que $U(R) > -1$. On cherche donc la valeur de R_i avec $V_i(R_i)$ le moins négatif possible pour laquelle on ne compense plus du tout. On cherche donc :

$$\mathrm{Max}\,\{ V_i(R_i)\,,\ \text{tel que } U(R) \leq -1,\ \forall\, R_{-i} \}$$

On a $U(R) \leq V_i(R_i) + \sum_{j \in N \setminus i} V_j^*$. Donc pour que $U(R) \leq -1$ pour tout R_{-i}, il faut et il suffit que $U(R_i, R_{-i}^*) \leq -1$. Donc le maximum précédent vaut :

$$\mathrm{Max}\,\{ V_i(R_i)\,,\ V_i(R_i) + \sum_{j \in N \setminus i} V_j^* \leq -1 \}$$

Si ce maximum existe, alors il est forcément atteint en $R_i = R_{i,\$}$ satisfaisant :

$$V_i(R_{i,\#}) + \sum_{j\in N\setminus i} V_j^* = -1$$

Il est facile de voir que $R_{i,\$}$ peut très bien être égal à $R_{i,\leftrightarrow}$. Donc, on a : $V_i(R_{i,\$}) \geq V_{i,\leftrightarrow}$. En remplaçant cette condition dans la relation satisfaite par $R_{i,\$}$, on en déduit que le minimum existe et est atteint si et seulement si :

$$V_{i,\leftrightarrow} + \sum_{j\in N\setminus i} V_j^* \leq -1$$

Cas où $V_{i,\leftrightarrow} + \sum_{j\in N\setminus i} V_j^* \leq -1$ (avec V_i décroissant): ce cas est illustré en figure 9.

Cas où $V_{i,\leftrightarrow} + \sum_{j\in N\setminus i} V_j^* > -1$: ce cas est illustré en figure 10.

Dans les prémisses des règles, les termes de compensation sont combinés via des opérateurs min et max à d'autres conditions. Ainsi, un comportement non borné (c'est-à-dire avec une courbe de niveau allant à l'infini) sur la compensation peut être borné par d'autres conditions.

En se bornant à une seule variable R_i, on a trois comportements possibles en combinant les cas précédents :

Cas où $V_{i,\leftrightarrow} + \sum_{j\in N\setminus i} V_j^* \leq -1$. Cela donne pour V_i décroissant le diagramme de la figurre 11.

Cas où $-1 < V_{i,\leftrightarrow} + \sum_{j\in N\setminus i} V_j^* \leq 0$. Cela donne pour V_i décroissant le diagramme de la figure 12.

Cas où $0 < V_{i,\leftrightarrow} + \sum_{j\in N\setminus i} V_j^*$. Cela donne pour V_i décroissant le diagramme de la figure 13.

On va exposer maintenant la méthodologie d'explicitation de la compensation selon l'invention. On se place dans le cadre très général où l'on dispose de n variables notées $R_1,\ldots,R_n$. On rappellera ici que $U(R_1,\ldots,R_n) = \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} V_i(R_i)$. On compense parfaitement si $U(R_1,\ldots,R_n)\geq 0$, et on ne compense plus du tout si $U(R_1,\ldots,R_n)\leq -1$.

Pour chaque $i\in\{1, \ldots,n\}$, la fonction d'utilité V_i est supposée monotone, c'est-à-dire soit croissante, soit décroissante. On note ε_i le signe de la dérivée de V_i. On a $\varepsilon_i=1$ si V_i est croissant, et $\varepsilon_i=-1$ si V_i est décroissant. On suppose que la compensation porte sur l'alternative $C_m \in C$.

Dans l'introduction de la compensation, plusieurs situations de compensations peuvent être possibles. Dans l'exemple cité ci-dessus (à propos de l'introduction de la compensation dans un arbre de décision) , la compensation introduite est du type :

R_1 compense R_2

Cela correspond au cas où la variable R_1 est plus importante que R_2. Dans le cas où aucune variable n'est dominante, les deux sens de compensation auraient pu être possibles :

(R_1 compense R_2) OU (R_2 compense R_1)

On voit donc que plusieurs situations de compensation peuvent être autorisées conjointement. Dans le cas général, on suppose que l'expert autorise un certain nombre (noté t) de situations de compensations possibles :

(les variables de A^+_1 compensent les variables de A^-_1) OU ...

OU (les variables de A^+_t compensent les variables de A^-_t)

Pour tout $p\in\{1,...,t\}$, on a $A^+_p \cap A^-_p=\emptyset$ et $A^+_p \cup A^-_p=\{1,...,n\}$. Autrement dit, une variable ne peut pas, dans une même situation de compensation, être à la fois compensée et compensante. De plus, dans n'importe quelle situation de compensation, toute variable est soit compensée soit compensante. On note $I=\{(A^+_1 , A^-_1),..., (A^+_t , A^-_t)\}$ l'ensemble des couples des compensations autorisées. L'ensemble des variables qui compensent d'autres vaut :

$$I^+ = \{ i\in\{1,...,n\} / \exists(A^+,A^-)\in I \text{ tel que } i\in A^+\}$$

L'ensemble des variables qui sont compensées par d'autres vaut :

$$I^- = \{ i\in\{1,...,n\} / \exists(A^+,A^-)\in I \text{ tel que } i\in A^-\}$$

Pour $i\in I^-$, on note $I^+(i) = \{ j\in I^- \ / \exists(A^+,A^-)\in I$ tel que $i\in A^-$ et $j\in A^+ \}$ et $I^-(i) = \{ j\in I^+ \ / \exists(A^+,A^-)\in I$ tel que $i\in A^-$ et $j\in A^+\}$.

Toutes les situations de compensation sont modélisées dans une unique fonction d'utilité globale $U(R_1,...,R_n) = \Sigma_{i\in\{1,...,n\}} \ V_i(R_i)$. Pour spécifier $U(R)$ dans les situations de compensation de I, il suffit de déterminer la partie positive de V_j pour tout $j\in I^+$, et la partie négative de V_i pour tout $i\in I^-$.

Néanmoins, puisque l'on se trouve dans un contexte de logique floue, la compensation sera forcément au moins un peu permise hors des situations de compensation telles qu'elles ont été définies par l'expert. Ceci montre que U(R) devra être défini pour tout R, et donc que les parties positives et négatives de V_i doivent être spécifiées pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. Toutefois, l'expert ne sera pas capable de réellement spécifier la compensation en dehors des situations de compensation qu'il a définies. On demandera donc le minimum d'informations possible dans ces zones.

Pour chaque $i \in N$, on désire savoir à quel cas parmi ceux décrits ci-dessus (à propos des comportements types de compensation) correspond la variable R_i. Rappelons que ces cas décrivent le comportement des courbes de niveau pour les mauvaises valeurs de la variable R_i. Pour $i \in I^-$, on pose la question :

Parmi les trois comportements possibles suivants, lequel correspond à R_i ?

On a les trois réponses possibles suivantes R1 à R3 :

<u>**R1 :**</u> **Il existe une valeur de R_i au -delà(si ε_i=1)/en deçà(si ε_i=–1) de laquelle plus aucune compensation n'est possible quelle que soit la valeur suivant les autres variables.**

<u>**R2 :**</u> **Quelle que soit la valeur de R_i (même très mauvaise), on compense parfaitement pour des valeurs suffisamment bonnes des autres variables.**

<u>**R3 :**</u> **Il existe une valeur de R_i au -delà(si ε_i=1)/en deçà(si ε_i=–1) de laquelle on ne compense plus parfaitement quelle que soit la valeur suivant les autres variables. De plus, quelle que soit la valeur de R_i (même très mauvaise), on compense toujours au moins un peu pour des valeurs suffisamment bonnes des autres variables.**

. On note $\Re_1$ l'ensemble des i appartenant au cas R1. On note $\Re_2$ l'ensemble des i appartenant au cas R2. On note $\Re_3$ l'ensemble des i appartenant au cas R3.

Comme cela a déjà été mentionné précédemment, les fonctions d'utilité sont caractérisées par le fait qu'elles ont une valeur minimale, une valeur maximale, et qu'elles passent par le niveau zéro. On peut donc se limiter à déterminer ces trois points caractéristiques.

Lorsque $i \in \Re_1$, la forme de la fonction d'utilité est un peu plus complexe. Elle comporte deux niveaux négatifs $V_{i,*}$ et $V_{i,**}$. Afin de pouvoir donner une définition rigoureuse de $R_{i,**}$ se référant à $V_{i,**}$, on se borne aux situations de compensations I telles qu'elles sont définies par l'expert. On rappelle que $V_{i,**}$ satisfait la relation $V_{i,**} + \sum_{j \in N \setminus i} V_j^* \leq -1$. Or l'expert s'intéresse aux situations de compensations telles qu'il les a définies, dans lesquelles la variable R_i apparaît. Il s'agit des couples $(A^+,A^-) \in I$ tels que $i \in A^-$. Il faut donc satisfaire la relation $V_{i,**} + \Sigma_{j \in A+} V_j^* \leq -1$ pour tout $(A^+,A^-) \in I$ tel que $i \in A^-$. De plus, afin de pouvoir définir très précisément $R_{i,**}$, on impose que la relation $V_{i,**} + \Sigma_{j \in A+} V_j^* \leq -1$ soit satisfaite avec une égalité pour un couple $(A^+,A^-) \in I$ avec $i \in A^-$. Malheureusement, on ne peut pas satisfaire en même temps cette contrainte et la relation $V_{i,**} + \sum_{j \in N \setminus i} V_j^* \leq -1$. Pour résoudre cette difficulté, on introduit deux niveaux négatifs $V_{i,*}$ et $V_{i,**}$. Soit $R_{i,*}$ la valeur de la variable R_i correspondant à l'utilité $V_{i,*}$: $V_{i,*}=V_i(R_{i,*})$. La valeur $V_{i,**}$ satisfait la relation $V_{i,**} + \sum_{j \in N \setminus i} V_j^* = -1$, de sorte que $R_{i,**}$ a une définition claire et précise en dehors du cadre de la compensation. La valeur $V_{i,*}$ satisfait la relation $V_{i,*} + \Sigma_{j \in A+} V_j^* \leq -1$ pour tout $(A^+,A^-) \in I$ tel que $i \in A^-$ (une de ces inégalités correspondant à une égalité), de sorte que $R_{i,*}$ a une définition claire et précise se référant au cas des situations de compensation définies par l'expert. La courbe de la figure 14 donne l'allure des fonctions d'utilité lorsqu'elles sont croissantes (ε_i=1).

Dans le cas où i appartient à $\mathfrak{R}_2$ ou $\mathfrak{R}_3$, on n'a pas besoin d'introduire $R_{i,*}$ et $V_{i,*}$. Néanmoins, dans la suite, on se référera aux valeurs $R_{i,*}$ et $V_{i,*}$ lorsque l'on se trouvera dans les situations de compensation de I. Par uniformité, on définit aussi $R_{i,*}$ et $V_{i,*}$ dans le cas où i appartient à $\mathfrak{R}_2$ ou $\mathfrak{R}_3$. Dans ce cas, on note $R_{i,*} = R_{i,**}$ et $V_{i,*} = R_{i,**}$.

On a pour tout $i \in \mathfrak{R}_1$:

$$\forall (A^+,A^-) \in I \text{ tel que } i \in A^-, \text{ on a } \quad V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^* \leq -1$$

On a pour tout $i \in \mathfrak{R}_2$:

$$\exists (A^+,A^-) \in I \text{ tel que } i \in A^-, \text{ on a } \quad 0 < V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^*$$

Le cas R3 est le complémentaire de l'union des deux premiers cas. On a pour tout $i \in \mathfrak{R}_3$:

$$\exists (A^+,A^-) \in I \text{ tel que } i \in A^-, \text{ on a } \quad V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^* > -1$$

$$\forall (A^+,A^-) \in I \text{ tel que } i \in A^-, \text{ on a } \quad V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^* \leq 0$$

On va examiner le cas de la réponse R1 seule. On suppose ici que pour tout i, on a $i \in \mathfrak{R}_1$.

Tout d'abord, on va examiner les fonctions d'utilité déterminées aux extrémités. On se limite dans cette partie à déterminer, pour tout i, les points caractéristiques s_i, R_i^*, $R_{i,*}$, $R_{i,**}$ ainsi que leur utilité. On suppose que les fonctions d'utilité sont soit simplement affines soit données par l'expert entre ces points. On va poser à l'expert des questions relatives aux deux courbes de niveau « on compense parfaitement » et « on ne compense pas du tout » concernant uniquement ces points caractéristiques. On suppose que l'expert sera capable d'expliciter seul le reste des fonctions d'utilité, c'est-à-dire leur comportement entre les points caractéristiques.

On doit donc déterminer pour tout i, les sept valeurs remarquables s_i, R_i^*, $R_{i,*}$, $R_{i,**}$, V_i^*, $V_{i,*}$ et $V_{i,**}$. Pour ce faire, on va se baser sur les conséquences de ces valeurs, c'est-à-dire la possibilité de l'alternative dérivant de U. Néanmoins, il ne sera pas aisé du tout pour un expert de pouvoir fournir, à partir de la valeur des variables, directement le degré de possibilité sur l'alternative dérivant de U. Par contre, il sera capable de dire si

l'alternative C_m est parfaitement possible ou si elle est impossible. Autrement dit, la détermination des paramètres pourra se faire en se basant sur des points remarquables des courbes de niveau 0 (l'alternative C_m est parfaitement possible) et –1 (l'alternative C_m est impossible) de U.

On va lister ici les points particuliers des deux courbes de niveau 0 et –1 de U susceptibles de permettre de déterminer les paramètres.

Soit $(A^+,A^-)\in I$, $i\in A^-$ et $A\subset A^+$. On définit le vecteur de variables $R_{i,A}^-(R_i)$ par : $(R_{i,A}^-(R_i))_i=R_i$, $(R_{i,A}^-(R_i))_k=s_k$ pour $k\in A^-\backslash i$ et pour $k\in A^+\backslash A$, et $(R_{i,A}^-(R_i))_k=R_k^*$ pour $k\in A$. D'après cette définition, pour R_i compris entre $R_{i,*}$ et s_i, les variables de A^+ sont bonnes alors que les variables de A^- sont mauvaises. Donc, les variables dans A^+ compensent bien les variables de A^-. On se trouve dans la compensation telle qu'elle est souhaitée par l'expert. On a :

$$U(\,R_{i,A}^-(R_i)\,) = V_i(R_i) + \Sigma_{k\in A} V_k^*$$

Pour $R_i=s_i$, on a $U(\,R_{i,A}^-(s_i)\,) = \Sigma_{k\in A} V_k^* \geq 0$. Pour $R_i= R_{i,*}$, comme la compensation est du type R1, on a :

$$U(\,R_{i,A}^-(R_{i,*})\,) = V_{i,*} + \Sigma_{k\in A} V_k^* \leq V_{i,*} + \Sigma_{k\in A+} V_k^* \leq -1$$

Donc, par continuité de la fonction d'utilité V_i, il existe R_i compris entre $R_{i,*}$ et s_i tel que $U(\,R_{i,A}^-(R_i)\,)=0$. C'est la plus petite(si $\varepsilon_i=1$)/grande(si $\varepsilon_i=-1$) valeur de R_i pour laquelle l'alternative C_m mérite parfaitement d'être attribuée au point $R_{i,A}^-(R_i)$. De plus, il existe R_i compris entre $R_{i,*}$ et s_i tel que $U(\,R_{i,A}^-(R_i)\,)=-1$. C'est la plus grande(si $\varepsilon_i=1$)/petite(si $\varepsilon_i=-1$) valeur de R_i pour laquelle l'alternative C_m est complètement impossible pour le point $R_{i,A}^-(R_i)$.

Un cas particulier intéressant se produit lorsque $A=\varnothing$. Dans ce cas, on a : $U(\,R_{i,\varnothing}^-(R_i)\,) = V_i(R_i)$. Donc $U(\,R_{i,\varnothing}^-(s_i)\,) = 0$.

Dans le cadre de la détermination des paramètres, et pour éviter les effets de seuils, on doit déterminer U, non pas seulement pour toutes les valeurs possibles des variables dans le cadre de la compensation, mais pour toutes les valeurs possibles des variables même en dehors du cadre de la compensation. Néanmoins, on devra poser à l'expert, dans la mesure du possible, uniquement des questions relatives à des valeurs se situant dans le cadre de la compensation.

On détermine au fur et à mesure les fonctions d'utilité. En cours de déroulement d'algorithme, on note D^+ l'ensemble des variables R_j pour lesquelles la partie positive de la fonction d'utilité V_j est déterminée, et D^- l'ensemble des variables R_l pour lesquelles la partie positive de la fonction d'utilité V_l est déterminée. Au départ de l'algorithme, on a $D^+=\varnothing$ et $D^-=\varnothing$.

On détaille maintenant l'algorithme. Les étapes sont numérotées par un label commençant toujours par C1-R1. La dénomination C1 signifie que l'on se situe dans le cas 1 (c'est-à-dire que l'on détermine les fonctions d'utilité uniquement aux extrémités) alors que R1 signifie que toutes les variables sont supposées appartenir au cadre R1 de compensation.

Le procédé de l'invention est composé des étapes suivantes :

<u>**C1-R1-1 -- Définition des seuils de référence $s_1, \ldots, s_n$:**</u> Les seuils de référence $s_1, \ldots, s_n$ correspondent au niveau qui permet de compenser parfaitement, mais de justesse, sur les variables $R_1, \ldots, R_n$. Pour déterminer s_l, l'expert répond à la question suivante :

Q1 [C1-R1] : Quelle est la valeur qui permet d'attribuer l'alternative C_m parfaitement, mais de justesse, d'après uniquement la variable R_l ?

Une autre question possible serait :

Q1' [C1-R1] : Quelle est la valeur qui permet d'attribuer l'alternative C_m parfaitement, mais de justesse, sur la variable R_l, si les autres seuils sont fixés au même niveau de satisfaction ?

On doit avoir :

(1-[C1-R1]) $V_i(s_i)=0$

C1-R1-2 -- Définition des valeurs R_j^* pour $j \in I^+$: A partir(si $\varepsilon_j=1$)/En deçà(si $\varepsilon_j=-1$) de R_j^*, la fonction d'utilité V_j reste bloquée à la valeur V_j^* et ne progresse plus. Pour déterminer R_j^*, l'expert répond à la question suivante :

Q2 [C1-R1] : A partir(si $\varepsilon_j=1$)/En dessous(si $\varepsilon_j=-1$) de quelle valeur de R_j cette variable ne peut-elle plus compenser davantage les variables de $I^-(j)$ dans l'attribution de l'alternative C_m ?

On doit avoir $\varepsilon_j \times R_{j,*} \geq \varepsilon_j \times R_{j,\blacklozenge}$, où $R_{j,\blacklozenge}$ est défini ci-dessus (à propos de la méthodologie d'explicitation du flou dans une condition non compensatoire).

C1-R1-3 -- Définition des valeurs $R_{k,*}$ pour $k \in I^-$: Dans le cadre d'une compensation du type R1, $R_{k,*}$ est la valeur de R_k en dessous de laquelle aucune compensation ne sera possible, quelle que soit la valeur suivant les autres variables (dans une situation de compensation de I). Cela signifie que l'on ne doit pas compenser du tout lorsque $R_k= R_{k,*}$ pour les meilleures valeurs possibles suivant les autres variables, dans le cadre de la compensation. On rappellera ici la condition donnée précédemment pour R1 :

(2-[C1-R1]) $\forall(A^+,A^-) \in I$ **avec** $k \in A^-$, $V_{k,*} + \Sigma_{j \in A+} V_j^* \leq -1$

Pour déterminer $R_{k,*}$, l'expert répond à la question suivante :

Q3 [C1-R1] : En dessous(si $\varepsilon_k=1$)/A partir(si $\varepsilon_k=-1$) de quelle valeur de R_k souhaitez-vous ne plus compenser du tout, et ce, quelle que soit la valeur suivant les autres variables (avec des valeurs correspondant à une situation de compensation) ?

Une autre question possible serait :

Q3' [C1-R1] : Jusqu'à(si $\varepsilon_k=1$)/A partir de(si $\varepsilon_k=-1$) quelle valeur de R_k l'alternative C_m ne mérite-t-elle plus d'être envisagée

(avec des valeurs correspondant à une situation de compensation) ?

On doit avoir $\varepsilon_k \times R_k^* \leq \varepsilon_k \times R_k^\blacklozenge$, où $R_k^\blacklozenge$ est défini ci –dessus (à propos de la méthodologie d'explicitation du flou dans une condition non compensatoire). D'après cette définition, R_k^* est la valeur limite de la compensation. Donc, dans (2-[C1-R1]), on doit avoir égalité pour un couple (A^+,A^-).

<u>**C1-R1-4 -- Détermination de la fonction d'utilité V_k entre $R_{k,\bullet}$ et s_k pour $k \in A^-$:**</u> A ce stade, la valeur de $V_{k,\bullet}$ n'est toujours pas spécifiée. Par contre, d'après l'équation (1-[C1-R1]), on sait que V_k correspond à une échelle de ratio. L'objectif de cette phase est de spécifier V_k en tant qu'échelle de ratio, c'est-à-dire de déterminer $\lambda_k(R_k)=V_k(R_k)/\ V_{k,\bullet}$. Ce nombre est compris entre 0 et 1 pour R_k compris entre $R_{k,\bullet}$ et s_k. Pour déterminer $\lambda_k(R_k)$, on utilise une méthodes issue de la théorie du mesurage. L'invention prévoit la méthodologie MACBETH (cf. C. Bana e Costa & J.C. Vansnick, *Applications of the MACBETH approach in the framework of an additive aggregation model*, Journal of Multicriteria Decision Analysis, N°6, pp.107-114, 1997). Néanmoins, toute autre méthodologie permettant de déterminer des fonctions d'utilité convient aussi. Dans le cas le plus simple, λ_k est simplement affine : $\lambda_k(R_k)=(s_k-R_k)/(s_k-R_{k,\bullet})$.

<u>**C1-R1-5 -- Détermination de la fonction d'utilité V_j entre s_j et R_j^* pour $j \in A^+$:**</u> On procède exactement comme dans la phase précédente. On détermine donc grâce à une méthode issue de la théorie du mesurage la valeur de $\lambda_j(R_j)=V_j(R_j)/\ V_j^*$. Ce nombre est compris entre 0 et 1 pour R_j compris entre s_j et R_j^*. Dans le cas le plus simple, λ_j est simplement affine : $\lambda_j(R_j)=(R_j-s_j)/(R_j^*-s_j)$.

<u>**C1-R1-6 -- Détermination de $i \in I \setminus D^-$ de référence :**</u> Le questionnaire va se baser sur une variable particulière parmi $I \setminus D^-$. L'objectif de cette étape est de déterminer cet indice. Il s'agit de la variable la plus importante

parmi celles qui sont compensées (dans $I^- \backslash D^-$). La compensation que l'on décrit porte généralement principalement sur une variable. C'est la variable que l'on cherche. Pour déterminer $i \in I^-$, l'expert répond à la question suivante :

Q4 [C1-R1] : Quelle est parmi les variables restantes qui sont compensées (c'est-à-dire $I^- \backslash D^-$) la plus importante, celle sur laquelle le questionnaire sera basé ?

<u>**C1-R1-7 -- Détermination de $V_{I,*}$ et de V_j^* pour tout $j \in I^+(i) \backslash D^+$:**</u> Soit $j \in I^+(i) \backslash D^+$. Soit $(A^+, A^-) \in I$ tel que $i \in A^-$ et $j \in A^+$. On va utiliser un point singulier défini ci-dessus (à propos des points particuliers sur les deux courbes de niveau). On considère le vecteur de variables $R_{i,j}^-(R_i)$ défini précédemment avec les ensembles A^+ et A^-. $R_{i,j}^-(R_i)$ correspond $R_{i,A}^-(R_i)$ lorsque $A=\{j\}$. Le vecteur de variables $R_{i,j}^-(R_i)$ est défini par : $(R_{i,j}^-(R_i))_i = R_i$, $(R_{i,j}^-(R_i))_j = R_j^*$, et $(R_{i,j}^-(R_i))_k = s_k$ pour $k \in N \backslash \{i,j\}$. On voit donc que $R_{i,j}^-(R_i)$ est indépendant de A^+ et A^-. On a vu ci-dessus (toujours à propos des points particuliers), qu'il existe R_i compris entre $R_{i,*}$ et s_i tel que $U(\ R_{i,j}^-(R_i)\ )=0$. On note $R_{i,j}^0$ cette valeur. Elle est indépendante de A^+ et A^-. C'est la plus petite(si $\varepsilon_i=1$)/grande(si $\varepsilon_i=-1$) valeur de R_i pour que l'alternative C_m mérite parfaitement d'être attribuée au point $R_{i,j}^-(R_i)$. Pour déterminer $R_{i,j}^0$, l'expert répond à la question suivante :

Q5[C1-R1] : Pour R_k fixé à s_k pour $k \neq i,j$, à partir de(si $\varepsilon_i=1$)/jusqu'à(si $\varepsilon_i=-1$) quelle valeur de R_i estimez -vous que la variable $R_j = R_j^*$ compense parfaitement R_i ?

Comme $U(\ R_{i,j}^-(\ R_{i,j}^0\ )\ )=0$, on doit avoir :

(3-[C1-R1]) $$V_j^* + \lambda_i(R_{i,j}^0)\, V_{i,*} = 0$$

On écrit, d'après l'équation (3-[C1-R1]), V_j^* en fonction de $V_{i,*}$. En plaçant cela dans (2-[C1-R1]), on obtient

$$(1 - \Sigma_{j \in A+ \backslash D+}\ \lambda_i(R_{i,j}^0)\ )\ V_{i,*} + \Sigma_{j \in A+ \cap D+}\ V_j^* \leq -1\ .$$

On ne peut pas se trouver dans le cas R1 de compensation si $1-\Sigma_{j\in A+\setminus D+}\lambda_i(R_{i,j}{}^0)\leq 0$. On suppose donc ici que $1-\Sigma_{j\in A+\setminus D+}\lambda_i(R_{i,j}{}^0)>0$. Dans la cas contraire, les informations fournies sont incohérentes. $V_{i,*}$ satisfait donc :

$$V_{i,*} \leq -(1+\Sigma_{j\in A+\cap D+} V_j^*) / (1-\Sigma_{j\in A+}\lambda_i(R_{i,j}{}^0))$$

Cette relation doit être satisfaite pour tout $(A^+,A^-)\in I$ tel que $i\in A^-$. On obtient donc :

$$V_{i,*} \leq \wedge_{(A+,A-)\in I / i\in A-} -(1+\Sigma_{j\in A+\cap D+} V_j^*) / (1-\Sigma_{j\in A+}\lambda_i(R_{i,j}{}^0))$$

où l'opérateur $\wedge$ désigne le minimum.

Afin que $R_{i,*}$ corresponde effectivement à la plus grande(si $\varepsilon_i=1$)/ petite(si $\varepsilon_i=-1$) valeur de R_i pour laquelle on ne compense plus du tout, la relation précédente doit être considérée avec une égalité. Ceci signifie que la relation $V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^* \leq -1$ sera satisfaite avec une égalité pour un couple (A^+,A^-). Donc :

(4-[C1-R1]) $$V_{i,*} = \wedge_{(A+,A-)\in I / i\in A-} -(1+\Sigma_{j\in A+\cap D+} V_j^*) / (1-\Sigma_{j\in A+}\lambda_i(R_{i,j}{}^0))$$

On en déduit avec (3-[C1-R1]) l'expression de V_j^* pour tout $j\in I^+(i)\setminus D^+$:

(5-[C1-R1]) $$V_j^* = -\lambda_i(R_{i,j}{}^0) \times \wedge_{(A+,A-)\in I / i\in A-} -(1+\Sigma_{j\in A+\cap D+} V_j^*) / (1-\Sigma_{j\in A+}\lambda_i(R_{i,j}{}^0))$$

On ajoute à l'ensemble D^- la variable i, et à D^+ l'ensemble $I^+(i)\setminus D^+$.

<u>C1-R1-8 -- Détermination de $V_{k,*}$ pour $k\in I^-\setminus D^-$ tel que $I^+(k)\subset D^+$:</u> Pour tout $k\in I^-\setminus D^-$ tel que $I^+(i)\subset D^+$, on a d'après (2-[C1-R1]), quel que soit $(A^+,A^-)\in I$ avec $k\in A^-$, on a :

$$V_{k,*} \leq -1 -\Sigma_{j\in A+} V_j^*$$

Donc :

$$V_{k,*} \leq \wedge_{(A+,A-)\in I / k\in A-} -1-\Sigma_{j\in A+} V_j^*$$

Comme précédemment, la relation précédente doit être considérée avec une égalité. On a donc pour tout $k\in I^-\setminus D^-$ tel que $I^+(i)\subset D^+$:

(6-[C1-R1]) $$V_{k,*} = \wedge_{(A+,A-)\in I / k\in A-} -1-\Sigma_{j\in A+} V_j^*$$

On ajoute à l'ensemble D^- les variables $k \in I^- \setminus D^-$ telles que $I^+(k) \subset D^+$. Si $D^- \neq I^-$, on retourne à l'étape C1-R1-6. Si $D^- = I^-$, alors forcément, on a $D^+ = I^+$.

<u>**C1-R1-9 -- Détermination de V_j^* pour un $j \notin I^+$:**</u> La variable R_j pour $j \notin I^+$ n'est jamais censée compenser d'autres variables, d'après les compensations possibles fixées par l'utilisateur. Néanmoins, il faut bien, pour éviter les effets de seuil, que toutes les compensations soient définies. Pour déterminer R_j^*, on pose à l'expert une question très proche de la question Q2[C1-R1] :

Q6 [C1-R1] : Jusqu'à(si ε_j=1)/A partir de(si ε_j=–1) quelle valeur de R_j cette variable ne peut-elle plus compenser davantage les autres variables dans l'attribution de l'alternative C_m ?

On ne va pas poser à l'expert une question du type Q5[C1-R1] pour déterminer V_j^*. On veut déterminer une valeur de V_j^* sans poser de question, quitte à être empirique. L'expert ne sera pas capable de raisonner dans ces zones, et donc de répondre à une question précise du type Q5[C1-R1]. La valeur exacte de la compensation dans ces zones est de moindre importance.

Comme cette variable n'est pas censée compenser d'autres, la manière dont elle compensera les autres sera forcément d'amplitude faible, c'est-à-dire qu'elle compensera moins que les variables qui sont censées compenser :

$$V_j^* < \wedge_{k \in I+} V_k^* .$$

On peut prendre par exemple:

$$V_j^* = \wedge_{k \in I+} V_k^*/2 .$$

<u>**C1-R1-10 -- Détermination de V_k au delà de $R_{k,*}$ pour $k \in I^-$:**</u> Pour déterminer $R_{k,**}$, on pose à l'expert une question très proche de la question Q3 [C1-R1] :

Q7 [C1-R1] : En dessous(si ε_k=1)/A partir(si ε_k=–1) de quelle valeur de R_k ne souhaitez-vous plus compenser du tout, et ce,

quelle que soit la valeur suivant les autres variables (avec des valeurs en dehors du cadre de la compensation) ?

Pour déterminer dans quelle mesure la compensation doit avoir lieu dans les zones autorisées de compensation, il suffit de connaître V_k entre s_k et $R_{k,*}$. Les valeurs de $R_{k,**}$ et $V_{k,**}$ n'ont aucune influence dans les zones où la compensation est autorisée. D'après la définition de $R_{k,**}$, $V_{k,**}$ doit satisfaire la relation :

$$\mathbf{V_{k,**} + \Sigma_{j\neq k} V_j^* = -1}$$

On obtient donc :

(7-[C1-R1]) $$\mathbf{V_{k,**} = -1 - \Sigma_{j\neq k} V_j^*}$$

<u>**C1-R1-11 -- Détermination de $R_{k,*}$ et de $V_{k,*}$ pour $k\notin I^-$:**</u> Pour $k\notin I^-$, la variable R_k n'est jamais censée être compensée par d'autres variables. Pour déterminer $R_{k,*}$ et $V_{k,*}$, on procède comme dans l'étape précédente. Pour déterminer $R_{k,*}$, on pose à l'expert une question très proche de la question Q3 [C1-R1] :

Q8 [C1-R1] : En dessous(si ε_k=1)/A partir(si ε_k=–1) de quelle valeur de R_k ne souhaitez-vous plus compenser du tout, et ce quelle que soit la valeur suivant les autres variables?

D'après la définition de $R_{k,*}$, on obtient, comme précédemment, pour $V_{k,*}$ l'expression suivante :

(8-[C1-R1]) $$\mathbf{V_{k,*} = -1 - \Sigma_{j\neq k} V_j^*}$$

A la fin des étapes C1-R1-7 et C1-R1-8, la construction certifie que la condition $V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^* \leq -1$ est bien satisfaite pour tout $(A^+,A^-)\in I$ tel que $i\in A^-$.

Une fois les paramètres calculés, on peut les valider en se reportant sur des points remarquables. Soit $(A^+,A^-)\in I$. On examine alors les différents cas de vecteurs de variables.

- Vecteur de variables $R_{k,\varnothing}^-$ pour $k\in A^-$. D'après les explications ci-dessus concernant les points particuliers sur les deux courbes de

niveau, il existe une valeur $R_{k,\varnothing}^{-1}$ de la variable R_k tel que $U(R_{k,\varnothing}^{-}(R_{k,\varnothing}^{-1})) = -1$. Comme $U(R_{k,\varnothing}^{-}(R_{k,\varnothing}^{-1})) = V_k(R_k)$, on a :

$$R_{k,\varnothing}^{-1} = V_k^{-1}(-1)$$

$R_{k,\varnothing}^{-1}$ s'interprète de la manière suivante :

Jusqu'à(si ε_k=1)/A partir de(si ε_k=–1) la valeur $R_{k,\varnothing}^{-1}$ de la variable R_k, les variables $R_p=s_p$ pour $p \in A^+$ ne compensent plus du tout R_k et $R_p=s_p$ pour $p \in A^- \setminus \{i\}$.

Cela peut aussi se dire de la façon suivante :

Jusqu'à(si ε_k=1)/A partir de(si ε_k=–1) la valeur $R_{k,\varnothing}^{-1}$ de la variable R_k, l'alternative C_m est impossible lorsque les autres variables sont au niveau du seuil s_p.

Si l'expert n'est pas en accord avec la valeur de $R_{k,\varnothing}^{-1}$, on impose $\lambda_k(R_{k,\varnothing}^{-1}) = -1/V_{k,*}$ pour la valeur $R_{k,\varnothing}^{-1}$ que l'expert estime être correcte.

- Vecteur de variables $R_{k,j}^{-}$ pour $k \in A^- \setminus \{i\}$ et $j \in A^+$. D'après les mêmes explications concernant les points particuliers, il existe une valeur $R_{k,j}^{-1}$ de la variable R_k telle que $U(R_{k,j}^{-}(R_{k,j}^{-1})) = -1$. Comme $U(R_{k,j}^{-}(R_{k,j}^{-1})) = V_k(R_k) + V_j^*$, on a :

$$R_{k,j}^{-1} = V_k^{-1}(-1 - V_j^*)$$

$R_{k,j}^{-1}$ s'interprète de la manière suivante :

Jusqu'à(si ε_k=1)/A partir de(si ε_k=–1) la valeur $R_{k,j}^{-1}$ de la variable R_k, les variables $R_k = R_k^*$ et $R_p=s_p$ pour $p \in A^+ \setminus \{j\}$ ne compensent plus du tout R_k et $R_p=s_p$ pour $p \in A^- \setminus \{i\}$.

Cela peut aussi se dire de la façon suivante :

Jusqu'à(si ε_k=1)/A partir de(si ε_k=–1) la valeur $R_{k,j}^{-1}$ de la variable R_k, l'alternative C_m est impossible lorsque les autres variables sont au niveau du seuil s_p, sauf la variable $R_j = R_j^*$.

Si l'expert n'est pas en accord avec la valeur de $R_{k,j}^{-1}$, on impose $\lambda_k(R_{k,j}^{-1}) = -(1+ V_j^*)/ V_{k,*}$ pour la valeur $R_{k,j}^{-1}$ que l'expert estime être correcte.

- Vecteur de variables $R_{k,j}^-$ pour $k\in A^-\backslash\{i\}$ et $j\in A^+$. D'après les mêmes explications concernant les points particuliers, il existe une valeur $R_{k,j}^0$ de la variable R_k tel que $U(R_{k,j}^-(R_{k,j}^0)) = 0$. On a :

$$R_{k,j}^0 = V_k^{-1}(- V_k^*)$$

$R_{i,j}^0$ s'interprète de la manière suivante :

A partir(si ε_k=1)/En dessous(si ε_k=–1) de la valeur $R_{k,j}^0$ de la variable R_k, les variables $R_k= R_k^*$ et $R_p=s_p$ pour $p\in A^+\backslash\{j\}$ compensent parfaitement R_k et $R_p=s_p$ pour $p\in A^-\backslash\{i\}$.

Cela peut aussi se dire de la façon suivante :

A partir(si ε_k=1)/En dessous(si ε_k=–1) de la valeur $R_{k,j}^0$ de la variable R_k, l'alternative C_m est parfaitement possible lorsque les autres variables sont au niveau du seuil s_p, sauf la variable $R_j= R_j^*$.

Si l'expert n'est pas en accord avec la valeur de $R_{k,j}^0$, on impose $\lambda_k(R_{k,j}^0)= - V_j^*/ V_{k,*}$ pour la valeur $R_{k,j}^0$ que l'expert estime être correcte.

On va examiner maintenant les fonctions d'utilité déterminées en tout point pour I^+ et I^- . L'hypothèse faite ci-dessus à propos des fonctions d'utilité déterminées aux extrémités est que l'expert est capable d'expliciter les fonctions d'utilité entre les valeurs extrêmes qui elles sont déterminées par la méthodologie. Ainsi, d'après les étapes C1-R1-4 et C1-R1-5 décrites ci-dessus, l'expert doit être capable de fournir $\lambda_i(R_i)$ pour tout R_i. Ceci est discutable compte tenu des implications que les valeurs de λ_i ont sur les courbes de niveau. Il est classique de considérer les fonctions d'utilité comme des fonctions affines par morceaux. Il peut paraître alors souhaitable que la méthodologie permette de déterminer les niveaux $V_i(R_i)$ de chaque point R_i délimitant deux parties affines.

Dans cette section, on suppose que l'expert n'est pas capable de déterminer $\lambda_i(R_i)$ entre les deux extrémités pour $i \in I^-$ ou $i \in I^+$.

Pour $j \in I^+$, on suppose que l'expert est capable de fournir les points intermédiaires pertinents entre s_j et R_j^*. On note $R_j^1, \dots, R_j^{pj}$ ces p_j points, et $V_j^k = V_j(R_j^k)$ pour $k \in \{1, \dots, p_j\}$, comme représenté en figure 15.

On note $R_j^0 = s_j$, $V_j^0 = 0$, $R_j^{pj+1} = R_j^*$ et $V_j^{pj+1} = V_j^*$. Pour $k \in \{0, \dots, p_j\}$ et $R_j \in [R_j^k, R_j^{k+1}]$, on a $V_j(R_j) = V_j^k + (V_j^{k+1} - V_j^k)\lambda_j^k(R_j)$ où $\lambda_j^k(R_j) = (R_j - R_j^k)/(R_j^{k+1} - R_j^k)$.

Pour $i \in I^-$, on suppose que l'expert est capable de fournir les points intermédiaires pertinents entre $R_{i,*}$ et s_i. On note $R_i^{-1}, \dots, R_i^{-p'i}$ ces p'_i points, et $V_i^k = V_i(R_i^k)$ pour $k \in \{-p'_i, \dots, -1\}$. On note $R_i^0 = s_i$, $V_i^0 = 0$, $R_i^{-p'i-1} = R_{i,*}$ et $V_i^{-p'i-1} = V_{i,*}$. Pour tout $k \in \{-p'_i - 1, \dots, -1\}$ et tout $R_i \in [R_i^k, R_i^{k+1}]$, on a $V_i(R_i) = V_i^k + (V_i^{k+1} - V_i^k)\lambda_i^k(R_i)$ où $\lambda_i^k(R_i) = (R_i - R_i^k)/(R_i^{k+1} - R_i^k)$. La fonction d'utilité est affine dans chaque segment $[R_i^k, R_i^{k+1}]$, comme représenté sur la courbe de la figure 16. On cherche ici, d'après les courbes de niveau 0 et -1, à déterminer $V_i^{-1}, \dots, V_i^{-p'i}$, $V_{i,*}$ pour $i \in I^-$, et V_j^*, $V_j^1, \dots, V_j^{pj}$ pour $j \in I^+$.

On va répertorier les points particuliers des deux courbes de niveau 0 et –1 de U susceptibles de permettre de déterminer les paramètres. Soit $(A^+,A^-)\in I$.

Soit K un ensemble d'indices k_j pour $j\in A^+$, avec $k_j\in\{0,\ldots,p_j+1\}$. Soit $i\in A^-$ et $K=\{k_j\}_{j\in A+}$. On définit le vecteur de variables $R_i^{K-}(R_i)$ par : $(R_i^{K-}(R_i))_i=R_i$, $(R_i^{K-}(R_i))_q=s_q$ pour $q\in A^-\backslash i$, et $(R_i^{K-}(R_i))_q=R_q^{kq}$ pour $q\in A^+$. On a :

$$U(R_i^{K-}(R_i)) = V_i(R_i) + \Sigma_{j\in A+} V_j^{kj}$$

Pour $R_i=s_i$, il vient :

$$U(R_i^{K-}(s_i)) = \Sigma_{j\in A+} V_j^{kj} \geq 0.$$

Pour $R_i= R_{i,*}$, comme la compensation est du type R1, on a :

$$U(R_i^{K-}(R_{i,*})) = V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^{kj} \leq V_{i,*} + \Sigma_{k\in A+} V_k^* \leq -1$$

Donc, par continuité, il existe R_i compris entre s_i et $R_{i,*}$ tel que $U(R_i^{K-}(R_i))=0$. On note $R_i^{K,0}$ ce point. C'est la plus petite(si $\varepsilon_i=1$)/grande(si $\varepsilon_i=-1$) valeur de R_i pour laquelle l'alternative C_m mérite parfaitement d'être attribuée au point $R_i^{K-}(R_i)$. On a :

$$V_i(R_i^{K,0}) + \Sigma_{j\in A+} V_j^{kj} = 0$$

De plus, il existe R_i compris entre s_i et $R_{i,*}$ tel que $U(R_i^{K-}(R_i))=-1$. On note $R_i^{K,-1}$ ce point. C'est la plus grande(si $\varepsilon_i=1$)/petite(si $\varepsilon_i=-1$) valeur de R_i pour laquelle l'alternative C_m est complètement impossible pour le point $R_{i,A}^-(R_i)$. On a :

$$V_i(R_i^{K,-1}) + \Sigma_{j\in A+} V_j^{kj} = -1$$

Soit $k_i\in\{-p'_i-1,\ldots,-1\}$, et un ensemble d'indices k_j pour $j\in A^+\backslash\{j\}$, avec $k_j\in\{0,\ldots,p_j+1\}$. On définit maintenant un autre point remarquable. Soit $i\in A^-$, $j\in A^+$ et $K=\{k_j\}_{j\in i\cup A+\backslash j}$. On définit le vecteur de variables $R_{i,j}^{K+}(R_j)$ par : $(R_{i,j}^{K+}(R_j))_j=R_j$, $(R_{i,j}^{K+}(R_j))_q=s_q$ pour $q\in A^-\backslash i$, et $(R_{i,j}^{K+}(R_j))_q=R_q^{kq}$ pour $q\in i\cup A^+\backslash j$. On a :

$$U(R_{i,j}^{K+}(R_j)) = V_j(R_j) + V_i^{ki} + \Sigma_{q\in A+\backslash j} V_q^{kq}$$

Contrairement au point remarquable précédent, il n'est pas assuré que lorsque R_j décrit l'intervalle compris entre s_j et R_j^* alors $U(R_{i,j}^{K+}(R_j))$ coupe

l'une des deux courbes de niveau 0 ou −1. On va étudier sous quelles conditions il y a intersection. Pour ce faire, soit K^0 l'ensemble d'indices défini sur A^+ par $(K^0)_q=k_q$ si $q\in A^+\backslash j$ et $(K^0)_j=0$. On note $R_i^{K0,0}$ et $R_i^{K0,-1}$ les points remarquables du vecteur de variables $R_i^{K0,-}$ défini précédemment à partir de K^0. Soit K^* l'ensemble d'indices défini sur A^+ par $(K^*)_q=k_q$ si $q\in A^+\backslash j$ et $(K^*)_j=p_j+1$. On note $R_i^{K^*,0}$ et $R_i^{K^*,-1}$ les points remarquables du vecteur de variables $R_i^{K^*,-}$ défini précédemment à partir de K^*. Soit enfin le vecteur de variables $R_{i,j}^K(R_i,R_j)$ par : $(R_{i,j}^K(R_i,R_j))_i=R_i$, $(R_{i,j}^K(R_i,R_j))_j=R_j$, $(R_{i,j}^K(R_i,R_j))_q=s_q$ pour $q\in A^-\backslash i$, et $(R_{i,j}^K(R_i,R_j))_q=R_q^{kq}$ pour $q\in A^+\backslash j$. On a :

$$U(\, R_{i,j}^K(R_i,R_j)\,) = V_i(R_i) + V_j(R_j) + \Sigma_{q\in A+\backslash j}\, V_q^{kq}$$

On a les cas suivants :

- Si $\varepsilon_i \times R_i < \varepsilon_i \times R_i^{K^*,-}$, alors pour tout $R_j\in[R_j^*,s_j]$, on a, comme V_i est croissant(si $\varepsilon_i=1$)/décroissant(si $\varepsilon_i=-1$) et d'après la définition de $R_i^{K^*,-}$:

  $$V_i(R_i) < V_i(R_i^{K^*,-}) = -1-V_j^*-\Sigma_{q\in A+\backslash j}\, V_q^{kq}$$

  Donc :

  $$U(\, R_{i,j}^K(R_i,R_j)\,) \le V_i(R_i) + V_j^* + \Sigma_{q\in A+\backslash j}\, V_q^{kq} < -1$$

  On en déduit que la courbe de niveau $U(\, R_{i,j}^K(R_i,R_j)\,) = -1$ ne passe pas par le rectangle $\varepsilon_i \times R_i < \varepsilon_i \times R_i^{K^*,-}$, $R_j\in[\, s_j,R_j^*]$.

- Soit $\varepsilon_i \times R_i^{K^*,-} \le \varepsilon_i \times R_i \le \varepsilon_i \times R_i^{K0,-}$. Alors $V_i(R_i^{K^*,-}) \le V_i(R_i) \le V_i(R_i^{K0,-})$. On a :

  $$V_i(R_i) \ge V_i(R_i^{K^*,-}) \Leftrightarrow U(\, R_{i,j}^K(R_i,R_j^*)\,) \ge -1$$

  $$V_i(R_i) \le V_i(R_i^{K0,-}) \Leftrightarrow U(\, R_{i,j}^K(R_i,s_j)\,) \le -1$$

  On en déduit qu'il existe $R_j\in[s_j,R_j^*]$ tel que $U(\, R_{i,j}^K(R_i,R_j)\,) = -1$.

- Soit $\varepsilon_i \times R_i^{K^*,0} \le \varepsilon_i \times R_i \le \varepsilon_i \times R_i^{K0,0}$. Alors $V_i(R_i^{K^*,0}) \le V_i(R_i) \le V_i(R_i^{K0,0})$. On a :

  $$V_i(R_i) \ge V_i(R_i^{K^*,0}) \Leftrightarrow U(\, R_{i,j}^K(R_i,R_j^*)\,) \ge 0$$

  $$V_i(R_i) \le V_i(R_i^{K0,0}) \Leftrightarrow U(\, R_{i,j}^K(R_i,s_j)\,) \le 0$$

  On en déduit qu'il existe $R_j\in[s_j,R_j^*]$ tel que $U(\, R_{i,j}^K(R_i,R_j)\,) = 0$.

- Si $\varepsilon_i \times R_i > \varepsilon_i \times R_i^{K0,0}$, alors, pour tout $R_j \in [s_j,R_j^*]$

$$U(R_{i,j}^K(R_i,R_j)) \geq U(R_{i,j}^K(s_i,s_j)) > 0$$

On en déduit que la courbe de niveau $U(R_{i,j}^K(R_i,R_j)) = 0$ ne passe pas par le rectangle $\varepsilon_i \times R_i > \varepsilon_i \times R_i^{K0,0}$, $R_j \in [s_j,R_j^*]$.

Clairement, on a $\varepsilon_i \times R_i^{K^*,-} < \varepsilon_i \times R_i^{K0,0}$ puisque :

$$\varepsilon_i \times R_i^{K^*,-} < \varepsilon_i \times R_i^{K0,0} \Leftrightarrow V_i(R_i^{K^*,-}) < V_i(R_i^{K0,0}) \Leftrightarrow -1-V_j^*-\Sigma_{q\in A+\setminus j} V_q^{kq} < \Sigma_{q\in A+\setminus j} V_q^{kq}$$

Cette dernière condition est vraie puisque $V_j^* \geq 0$.

D'autre part, il est facile de voir que l'on est sûr que pour tout R_i tel que $\varepsilon_i \times R_i^{K^*,-} \leq \varepsilon_i \times R_i \leq \varepsilon_i \times R_i^{K0,0}$, au moins une des deux courbes de niveau $U(R_{i,j}^K(R_i,R_j)) = 0$ ou $U(R_{i,j}^K(R_i,R_j)) = -1$ est atteinte pour un $R_j \in [s_j,R_j^*]$ si et seulement si les deux intervalles $[R_i^{K^*,-}, R_i^{K0,-}]$ et $[R_i^{K^*,0}, R_i^{K0,0}]$ s'intersèquent. Cette dernière condition dit qu'il n'y a pas de trou entre les deux intervalles. Cela s'écrit $\varepsilon_i \times R_i^{K^*,0} \leq \varepsilon_i \times R_i^{K0,-}$. On a :

$$\varepsilon_i \times R_i^{K^*,0} \leq \varepsilon_i \times R_i^{K0,-} \Leftrightarrow V_i(R_i^{K^*,0}) \leq V_i(R_i^{K0,-}) \Leftrightarrow -V_j^*-\Sigma_{q\in A+\setminus j} V_q^{kq} \leq -1-\Sigma_{q\in A+\setminus j} V_q^{kq} \Leftrightarrow V_j^* \geq 1$$

Autrement dit, pour tout R_i tel que $\varepsilon_i \times R_i^{K^*,-} \leq \varepsilon_i \times R_i \leq \varepsilon_i \times R_i^{K0,0}$, au moins une des deux courbes de niveau $U(R_{i,j}^K(R_i,R_j)) = 0$ ou $U(R_{i,j}^K(R_i,R_j)) = -1$ est atteinte pour un $R_j \in [s_j,R_j^*]$ si et seulement si $V_j^* \geq 1$.

On va revenir maintenant à $R_{i,j}^{K+}(R_j)$. On souhaite que l'ensemble des valeurs que peut prendre $U(R_{i,j}^{K+}(R_j))$ lorsque R_j décrit $[s_j,R_j^*]$ coupe l'une des courbes de niveau 0 ou –1 pour tout $k_i \in \{-p_i-1,\ldots,-1\}$. Pour ce faire, d'après ce qui précède, il faut que j satisfasse $V_j^* \geq 1$ et que $\varepsilon_i \times R_i^{K^*,-} \leq \varepsilon_i \times R_i^k \leq \varepsilon_i \times R_i^{K0,0}$.

On a :

$$\exists R_j \in [s_j,R_j^*] \text{ tel que } U(R_{i,j}^{K+}(R_j)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon_i \times R_i^{K^*,0} \leq \varepsilon_i \times R_i^k \leq \varepsilon_i \times R_i^{K0,0} \Leftrightarrow V_i^k \in [V_i(R_i^{K^*,0}), V_i(R_i^{K0,0})]$$

$$\Leftrightarrow V_i^k \in [-V_j^*-\Sigma_{q\in A+\setminus j} V_q^{kq}, -\Sigma_{q\in A+\setminus j} V_q^{kq}]$$

Si $k_q=0$ pour tout $q \in A^+\setminus j$, alors $V_q^{kq}=0$ et donc cela donne :

$\exists\ R_j \in [s_j, R_j^*]$ tel que $U(R_{i,j}^{K+}(R_j)) = 0 \ \Leftrightarrow\ V_i^k \in [\,-V_j^*, 0\,]$

Donc si k est très petit, alors on s'attend à ce que V_i^k soit proche de 0. Dans ce cas, les valeurs k_q qui permettront de croiser la courbe de niveau 0 seront nulles ou en tout cas petites.

On a de plus :

$\exists\ R_j \in [s_j, R_j^*]$ tel que $U(R_{i,j}^{K+}(R_j)) = -1$

$\Leftrightarrow\ \varepsilon_i \times R_i^{K^*,-} \leq \varepsilon_i \times R_i^k \leq \varepsilon_i \times R_i^{K0,-} \ \Leftrightarrow\ V_i^k \in [\, V_i(R_i^{K^*,-}), V_i(R_i^{K0,-})\,]$

$\Leftrightarrow\ V_i^k \in [\,-1-V_j^*-\Sigma_{q\in A+\backslash j} V_q^{kq}, -1-\Sigma_{q\in A+\backslash j} V_q^{kq}\,]$

Si $k_q=p_q+1$ pour tout $q\in A^+\backslash j$, alors $V_q^{kq}=V_q^*$ et donc cela donne :

$\exists\ R_j \in [s_j, R_j^*]$ tel que $U(R_{i,j}^{K+}(R_j)) = 0 \ \Leftrightarrow\ V_i^k \in [\,-1-\Sigma_{q\in A+} V_q^*, -1-\Sigma_{q\in A+\backslash j} V_q^*\,] \ \Leftrightarrow\ V_i^k \in [\, V_{i,*}, V_{i,*} + V_j^*\,]$

Donc si k est grand, alors on s'attend à ce que V_i^k soit proche de $V_{i,*}$. Dans ce cas, les valeurs k_q qui permettront de croiser la courbe de niveau -1 seront égales à p_q+1 ou en tout cas grandes.

On procède de la façon suivante pour la détermination des paramètres.On détermine au fur et à mesure les fonctions d'utilité. En cours de déroulement d'algorithme, on note D^+ l'ensemble des variables R_j pour lesquelles la partie positive de la fonction d'utilité V_j est déterminée, et D^- l'ensemble des variables R_i pour lesquelles la partie positive de la fonction d'utilité V_i est déterminée. Au départ de l'algorithme, on a $D^+=\varnothing$ et $D^-=\varnothing$.

On détaille maintenant l'algorithme. Les étapes sont numérotées par un label commençant toujours par C2-R1. La dénomination C2 signifie que l'on se situe dans le cas 2 (c'est-à-dire que l'on détermine les fonctions d'utilité en tout point) alors que R1 signifie que toutes les variables sont supposées appartenir au cadre R1 de compensation.

Le processus de l'invention est composé des étapes suivantes :

<u>**C2-R1-1 – Définition des seuils de référence $s_1, \ldots, s_n$:**</u> Cette étape est strictement identique à l'étape C1-R1-1.

<u>**C2-R1-2 -- Définition des valeurs R_i^* pour $i\in I^+$:**</u> Cette étape est strictement identique à l'étape C1-R1-2.

C2-R1-3 -- Définition des valeurs $R_{k,*}$ pour $k \in I^-$: Cette étape est strictement identique à l'étape C1-R1-2.

C2-R1-4 -- Détermination des points $R_k^{-1},\ldots,R_k^{-p'k}$ pour $k \in I^-$: On demande à l'expert de donner les points intermédiaires pertinents entre s_k et $R_{k,*}$. Il n'est pas nécessaire en général d'en mettre beaucoup. De un à trois points suffisent la plupart du temps.

C2-R1-5 -- Détermination des points $R_j^1,\ldots,R_j^{pj}$ pour $j \in I^+$: On demande à l'expert de donner les points intermédiaires pertinents entre R_j^* et s_j.

On pose $D^+=\varnothing$ et $D^-=\varnothing$ avant d'arriver à l'étape suivante.

C2-R1-6 -- Détermination de $i \in I^- \backslash D^-$ de référence, et caractérisation de V_j^k pour tout $j \in I^+(i)\backslash D^+$ et $k \in \{1,\ldots,p_j+1\}$: On commence par déterminer un indice $i \in I^- \backslash D^-$ de référence. Cette étape est strictement identique à l'étape C1-R1-6. On pose en particulier la question Q4[C1-R1] pour déterminer cet indice i.

Soient $j \in I^+(i)\backslash D^+$. Soit $k \in \{1,\ldots,p_j+1\}$ et K l'ensemble d'indices défini sur A^+ (pour A^+ tel que $(A^+,A^-) \in I$, $i \in A^-$ et $j \in A^+$) par $K_q=0$ si $q \in A^+ \backslash j$ et $K_j=k$. $R_i^{K,0}$ ne dépend pas de A^+. On demande à l'expert de fournir la valeur de $R_i^{K,0}$:

> **Q4[C2-R1] : Pour R_q fixé à s_q pour $q \neq i,j$, à partir de(si $\varepsilon_i=1$)/jusqu'à(si $\varepsilon_i=-1$) quelle valeur de R_i estimez-vous que la variable $R_j= R_j^k$ compense parfaitement R_i ?**

Comme $U(R_i^{K-}(R_i^{K,0}))=0$, on doit avoir :

$$V_j^k + V_i(R_i^{K,0}) = 0 \tag{3-[C2-R1]}$$

A partir de l'indice i de référence, on détermine $R_i^{K,0}$ pour tout $j \in I^+(i)\backslash D^+$ et tout $k \in \{1,\ldots,p_j+1\}$. L'équation (3-[C2-R1]) fournit donc une relation satisfaite par V_j^k pour tout $j \in I^+(i)\backslash D^+$ et tout $k \in \{1,\ldots,p_j+1\}$.

On ajoute à l'ensemble D^- la variable i, et à D^+ l'ensemble $I^+(i)\backslash D^+$. Si $D^- \neq I^-$, on retourne à l'étape C2-R1-6. Si $D^-= I^-$, toutes les valeurs V_j^k (pour tout $j \in I^+$ et tout $k \in \{1,\ldots,p_j+1\}$) sont caractérisées par une relation du

type (3-[C2-R1]). On va s'occuper dans l'étape suivante de caractériser V_i^k.

C2-R1-7 -- Détermination d'un classement sur I^+: On doit fixer un indice de référence $j \in I^+ \backslash D^+$. On souhaite prendre j pour lequel V_j^* est maximum. Contrairement à l'étape précédente, comme on dispose déjà d'informations, on veut éviter de poser une question à l'expert pour déterminer l'indice de référence j. On souhaite obtenir une sorte de classement parmi les indices de I^+. Les indices de référence seront pris dans l'ordre établi par ce classement.

Comme on ne connaît pas encore la valeur de V_j^*, on se base sur la connaissance des $R_i^{K,0}$, où i est un indice de référence de l'étape C2-R1-6. Lors de l'étape C2-R1-6, l'expert a pu fournir plusieurs indices i de référence. On part donc de l'ordre dans lequel l'expert a fourni les indices i de référence. Les indices j dans $I^+(i)\backslash D_i^+$ (où D_i^+ est la valeur de D^+ au moment où l'étape C2-R1-6 se trouve au niveau de l'indice de référence i) pour un indice de référence i seront tous préférés aux indices $I^+(i')\backslash D_{i'}^+$ pour un autre indice de référence i' si l'expert a donné i avant i'. L'union des tous les ensembles $I^+(i)\backslash D_i^+$ pour tous les indices i de référence est égal à I^+. Il suffit donc maintenant d'expliquer comment ordonner les différents indices parmi $I^+(i)\backslash D_i^+$ pour un i fixé. Pour $j \in I^+$, d'après l'équation (3-[C2-R1]), la valeur $R_i^{K,0}$ vérifie $V_j^*+V_i(R_i^{K,0})=0$. On en déduit que V_j^* est d'autant plus grand que $V_i(R_i^{K,0})$ est petit, et donc que $R_i^{K,0}$ est petit(si $\varepsilon_i=1$)/grand(si $\varepsilon_i=-1$). On classe donc les indices $j \in I^+(i)\backslash D_i^+$ par ordre croissant(si $\varepsilon_i=1$)/décroissant(si $\varepsilon_i=-1$) de $R_i^{K,0}$.

On pose à nouveau $D^+=\varnothing$ et $D^-=\varnothing$ avant d'aller à l'étape suivante.

C2-R1-8 -- Détermination de $j \in I^+ \backslash D^+$ de référence, et caractérisation de V_i^k pour tout $i \in I^-(j)\backslash D^-$ et $k \in \{-p'_i-1,\ldots,-1\}$: L'indice de référence $j \in I^+ \backslash D^+$ considéré est le plus petit indice appartenant à $I^+ \backslash D^+$ dans l'ordre défini à l'étape précédente. Si $I^-(j)\backslash D^-=\varnothing$, on rajoute j à D^+ et on détermine à nouveau un indice de référence $j \in I^+ \backslash D^+$.

Soit $i \in I^-(j) \backslash D^-$. Soit $k \in \{-p'_i-1,\ldots,-1\}$. Soit $(A^+,A^-) \in I$ avec $i \in A^-$ et $j \in A^+$.

On doit déterminer les valeurs des indices k_q pour $q \in A^+ \backslash j$ pour lesquelles l'ensemble des valeurs que peut prendre $U(R_{i,j}^{K+}(R_j))$ lorsque R_j décrit $[R_j^*,s_j]$ coupe l'une des courbes de niveau 0 ou -1. On se sert de ce qui a été établi ci-dessus à propos des points particuliers sur les deux courbes de niveau 0 et -1 de U.

La détermination des indices $\{k_q\}_{q \in A+\backslash j}$ est décrite ci-dessous à propos des fonctions d'utilité déterminées en tout point pour I^+ et I^-. On considère tout d'abord le cas de la courbe de niveau 0. On demande à l'expert de fournir la valeur de R_j pour laquelle $U(R_{i,j}^{K+}(R_j))=0$:

Q5 : A partir de(si $\varepsilon_j=1$)/Jusqu'à(si $\varepsilon_j=-1$) quelle valeur de R_j estimez-vous que les variables R_j et $R_q=R_q^{kq}$ pour $q \in A^+ \backslash \{j\}$ compensent parfaitement $R_i= R_i^k$ et $R_q=s_q$ pour $q \in A^- \backslash \{i\}$?

On note $R_j^{iK,0}$ cette valeur. On doit avoir :

(4-[C2-R1]) $$V_i^k + V_j(R_j^{iK,0}) + \Sigma_{q \in A+\backslash\{j\}} V_q^{kq} = 0$$

Si l'expert préfère raisonner sur la courbe de niveau -1, on lui demande de fournir la valeur de R_j pour laquelle $U(R_{i,j}^{K+}(R_j))= -1$:

Q5' : A partir de(si $\varepsilon_j=1$)/Jusqu'à(si $\varepsilon_j=-1$) quelle valeur de R_j estimez-vous que les variables R_j et $R_q=R_q^{kq}$ pour $q \in A^+ \backslash \{j\}$ compensent parfaitement $R_i= R_i^k$ et $R_q=s_q$ pour $q \in A^- \backslash \{i\}$?

On note $R_j^{iK,-}$ cette valeur. On doit avoir :

(4'-[C2-R1]) $$V_i^k + V_j(R_j^{iK,-}) + \Sigma_{q \in A+\backslash\{j\}} V_q^{kq} = -1$$

On ajoute à l'ensemble D^+ la variable j, et à D^- l'ensemble $I^-(j) \backslash D^-$. Si $D^+ \neq I^+$, on retourne à l'étape C2-R1-8.

<u>**C2-R1-9 – Détermination des paramètres dans les situations de compensation :**</u> on va se référer aux équations obtenues. La relation (1-[C1-R1]) donne la valeur de s_q pour tout q. On met ces équations à part, car cela revient à ne pas considérer $V_q(s_q)$ comme une inconnue. Ainsi, les inconnues sont V_i^k pour $i \in A^-$, $k \in \{-p'_i-1,\ldots,-1\}$ et V_j^k pour $j \in A^+$,

$k \in \{1,\ldots,p_j+1\}$. Cela donne $\Sigma_{q\in\{1,\ldots,n\}}$ (p_q+1) inconnues. D'autre part, on a la relation (3-[C2-R1]) pour tout $j \in A^+$, $k \in \{1,\ldots,p_j+1\}$, et la relation (4-[C2-R1]) ou (4'-[C2-R1]) pour tout $j \in A^-$ et $k \in \{-p'_j-1,\ldots,-1\}$. Au total cela donne $\Sigma_{q\in\{1,\ldots,n\}}$ (p_q+1) équations. Il faut ajouter à cela les conditions sur le type de compensation. Dans le cas général, cela revient à introduire un certain nombre d'équations et d'inéquations en variables réelles et {0,1}, comme décrit ci-dessous en référence à la détermination du point particulier. On a donc autant d'inconnues que d'équations. Cela permet donc de calculer une unique solution, si elle existe. On peut aussi ajouter les contraintes suivantes :

$$V_j^1 \leq V_j^2 \leq \ldots \leq V_j^{pj+1} \quad \forall j \in I^+ \quad \text{et} \quad V_i^{-1} \geq V_i^{-2} \geq \ldots \geq V_i^{-p'i-1} \quad \forall i \in I^-$$

On peut résoudre un problème linéaire en minimisant la somme des erreurs sur toutes les équations. Si on impose que, parmi toutes les inégalités dans (2-[C1-R1]), une soit une égalité, on obtient un programme linéaire en nombres entiers.

<u>**C2-R1-10 à C2-R1-12:**</u> Ces étapes sont strictement identiques aux étapes C1-R1-9 à C1-R1-11.

On va examiner maintenant le cas général, pour lequel on suppose que l'on peut avoir un mélange entre les cas $\mathfrak{R}_1$, $\mathfrak{R}_2$ et $\mathfrak{R}_3$.

On s'intéresse d'abord aux fonctions d'utilité déterminées aux extrémités. On détermine au fur et à mesure les fonctions d'utilité. En cours de déroulement d'algorithme, on note D^+ l'ensemble des variables R_j pour lesquelles la partie positive de la fonction d'utilité V_j est déterminée, et D^- l'ensemble des variables R_i pour lesquelles la partie positive de la fonction d'utilité V_i est déterminée. Au départ du déroulement de l'algorithme, on a $D^+=\varnothing$ et $D^-=\varnothing$.

On suppose que, pour tout i, la variable R_i satisfait l'hypothèse suivante :

H-[C1-R*] : Pour R_{-i} fixé à s_{-i}, la compensation devient complètement impossible au-delà d'une certaine valeur de R_i.

Autrement dit, une très mauvaise valeur de R_i ne peut plus du tout être compensée pour des valeurs neutres (égales aux seuils) suivant les autres variables. Cette condition implique la relation suivante :

(1-[C1-R*]) $\forall i, \quad V_{i,*} < -1$

On va détailler maintenant l'algorithme. Les étapes sont numérotées par un label commençant toujours par C1-R*. La dénomination C1 signifie que l'on se situe dans le cas 1 (c'est-à-dire que l'on détermine les fonctions d'utilité uniquement aux extrémités) alors que R* signifie que les variables sont susceptibles d'appartenir à n'importe quel des trois cas de compensation R1, R2 ou R3.

Les étapes dépendent en partie du type de compensation considéré (R1, R2 ou R3). Lorsqu'une étape dépend du type de compensation, on met entre crochets à la fin du numéro de l'étape un rappel de la compensation correspondante. Le processus est basé sur les étapes suivantes :

C1-R*-1 -- Définition des seuils de référence $s_1, \ldots, s_n$: Cette étape est strictement identique à l'étape C1-R1-1.

C1-R*-2 – Définition des valeurs R_i^* pour $i \in I^+$: Cette étape est strictement identique à l'étape C1-R1-2.

Détermination des V_i pour $i \in \Re_1$: Les étapes dont le numéro se termine par un crochet [1] sont spécifiques au cas R1 ($i \in \Re_1$). Elles seront déclinées suivant les cas R2 et R3 respectivement avec les crochets [2] et [3]. Les étapes ne portant pas de crochet sont génériques et ne sont pas répétées dans les cas R2 et R3.

C1-R*-3[1] -- Définition des valeurs $R_{k,*}$ pour $k \in I^-$: Cette étape est strictement identique à l'étape C1-R1-2.

C1-R*-4 -- Détermination de la fonction d'utilité V_k entre $R_{k,*}$ et s_k pour $k \in I^-$: Cette étape est strictement identique à l'étape C1-R1-4.

C1-R*-5 – Détermination de la fonction d'utilité V_i entre s_i et R_i^* pour $i \in I^+$: Cette étape est strictement identique à l'étape C1-R1-5.

C1-R*-6[1] -- Détermination de $i\in\Re_1\backslash D^-$ de référence : Le questionnaire va se baser sur une variable particulière parmi $\Re_1\backslash D^-$. Cette étape est identique à l'étape C1-R1-6.

C1-R1-7[1] -- Détermination de $V_{i,*}$ et de V_j^* pour tout $j\in I^+(i)\backslash D^+$: Soit $j\in I^+(i)\backslash D^+$. Cette étape est identique à l'étape C1-R1-7. Grâce à la question Q5[C1-R1], on détermine $R_{i,j}^0$. Comme dans l'étape C1-R1-7, on a :

$$\textbf{(2-[C1-R*])} \qquad V_{i,*} = \wedge_{(A+,A-)\in I\,/\,i\in A-} -(1+\Sigma_{j\in A+\cap D+} V_j^*\,)\,/\,(1-\Sigma_{j\in A+}\lambda_i(R_{i,j}^0)\,)$$

L'expression de V_j^* pour tout $j\in I^+(i)\backslash D^+$ est :

(3-[C1-R*])

$$V_j^* = -\lambda_i(R_{i,j}^0)\times \wedge_{(A+,A-)\in I\,/\,i\in A-} -(1+\Sigma_{j\in A+\cap D+} V_j^*\,)\,/\,(1-\Sigma_{j\in A+}\lambda_i(R_{i,j}^0)\,)$$

On ajoute à l'ensemble D^- la variable i, et à D^+ l'ensemble $I^+(i)\backslash D^+$. Si $D^-\neq I^-$, on retourne à une étape C1-R1-6[1], C1-R1-6[2] ou C1-R1-6[3].

C1-R*-8[1] -- Détermination de $V_{k,*}$ pour $k\in\Re_1\cap(I^-\backslash D^-)$ tel que $I^+(k)\subset D^+$: Pour tout $k\in\Re_1\cap(I^-\backslash D^-)$ tel que $I^+(i)\subset D^+$, on procède exactement comme dans l'étape C1-R1-8. La valeur de $V_{k,*}$ est alors donnée par la formule (6-[C1-R1]).

On procède ensuite à la détermination des V_i pour $i\in\Re_2$ comme suit.

C1-R*-3[2] -- Définition des valeurs $R_{k,*}$ pour $k\in I^-$: En dessous(si ε_k=1)/A partir(si ε_k=−1) de $R_{k,*}$, la fonction d'utilité V_k reste bloquée à la valeur $V_{k,*}$ et ne diminue plus. Contrairement à une compensation du type R1, il n'y a pas de comportement limite selon la variable R_k au delà de $R_{k,*}$ avec une compensation du type R2. Pour déterminer $R_{k,*}$, l'expert répond à la question suivante :

> **Q1[C1-R*] : A partir(si ε_k=1)/En dessous(si ε_k=−1) de quelle valeur de R_k souhaitez-vous ne plus pénaliser davantage la compensation?**

C1-R*-6[2] -- Détermination de $i\in\Re_2\backslash D^-$ de référence : Le questionnaire va se baser sur une variable particulière parmi $\Re_2\backslash D^-$. Cette

étape est identique à l'étape C1-R1-6. D'après la condition donnée précédemment pour R2, on a :

(4-[C1-R*]) $\exists(A^+,A^-)\in I$ **tel que** $i\in A^-$**, on a** $0 < V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^*$

On demande à l'expert le couple (A^+,A^-) pour lequel l'inégalité précédente est satisfaite.

Q2[C1-R*] : Dans quelle situation de compensation, quelle que soit la valeur de R_i (même très mauvaise), compense-t-on parfaitement pour des valeurs suffisamment bonnes des autres variables ?

<u>C1-R*-7[2] -- Détermination de $V_{i,*}$ et de V_j^* pour tout $j\in A^+\backslash D^+$:</u>

Pour tout $j\in A^+\backslash D^+$, on pose la question suivante :

Q3[C1-R*] : Pour $R_{-\{i,j\}}$ fixé à $s_{-\{i,j\}}$, la variable R_j à la valeur R_j^* compense-t-elle au moins un peu la variable R_i à la valeur $R_{i,*}$?

- Si la réponse à Q3[C1-R*] est positive, alors cela signifie que $V_{i,*}+V_j^*>-1$. Soit alors le vecteur de variables $R(R_j)$ tel que : $(R(R_j))_j=R_j$, $(R(R_j))_i=R_{i,*}$ et $(R(R_j))_k=s_k$ pour $k\notin\{i,j\}$. On a : $U(R(R_j))=V_j(R_j)+V_{i,*}$. Pour $R_j=s_j$, on a : $U(R(s_j))=V_{i,*}<-1$ d'après (1-[C1-R*]), et pour $R_j=R_j^*$, on a $U(R(R_j^*))=V_j^*+V_{i,*}>-1$ d'après la réponse à la question Q5[C1-R2]. On en déduit qu'il existe R_j^0 compris entre s_j et R_j^* tel que $U(R(R_j^*))=-1$. Comme $V_{i,*}<-1$, on a $R_j^0<s_j$ et donc $\lambda_j(R_j^0)>0$. Pour déterminer R_j^0, l'expert répond à la question suivante :

  Q3[C1-R*] : Pour $R_{-\{i,j\}}$ fixé à $s_{-\{i,j\}}$, jusqu'à(si $\varepsilon_j=1$)/à partir de(si $\varepsilon_j=-1$) quelle valeur de R_j estimez-vous que la variable R_i à la valeur $R_{i,*}$ n'est plus du tout compensée?

  Comme $U(R(R_j^0))= -1$, on a :

  (5-[C1-R*]) $V_{i,*} + \lambda_j(R_j^0)\, V_j^* = -1$

- Si la réponse à Q3[C1-R*] est négative, alors cela signifie que $V_{i,*}+V_j^*\leq-1$. Soit alors le vecteur de variables $R(R_i)$ tel que $(R(R_i))_i=R_i$, $(R(R_i))_j=R_i^*$ et $(R(R_i))_k=s_k$ pour $k\notin\{i,j\}$. On a : $U(R(R_i))=V_i(R_i)+V_j^*$. Pour $R_i=s_i$, on a : $U(R(s_i))=V_j^*\geq0$, et pour $R_i=R_{i,*}$, on a : $U(R(R_{i,*}))=V_{i,*}+V_j^*\leq-1$

d'après la réponse à la question Q5[C1-R2]. On en déduit qu'il existe R_i^0 compris entre s_i et $R_{i,*}$ tel que $U(R(R_i^0))=-1$. Pour déterminer R_i^0, l'expert répond à la question suivante :

Q3'[C1-R*] : Pour $R_{-\{i,j\}}$ fixé à $s_{-\{i,j\}}$, à partir(si $\varepsilon_i=1$)/en dessous(si $\varepsilon_i=-1$) de quelle valeur estimez-vous que R_i ne peut plus du tout être compensé par R_j à la valeur R_j^* ?

Comme $U(R(R_i^0))= -1$, on a :

(5'-[C1-R*]) $$V_j^* + \lambda_i(R_i^0)\, V_{i,*} = -1$$

On pose : $\tau_{ij}=\lambda_i(R_i^0)$ si $V_{i,*}+V_j^*\leq-1$, et $\tau_{ij}=1/\lambda_j(R_j^0)$ si $V_{i,*}+V_j^*>-1$. On pose de plus $T_{ij}=1$ si $V_{i,*}+V_j^*\leq-1$, et $T_{ij}=1/\lambda_j(R_j^0)$ si $V_{i,*}+V_j^*>-1$. D'après (4-[C1-R2]) et (4'-[C1-R2]), pour tout $j\in A^+\backslash D^+$, on a :

(5"-[C1-R*]) $$V_j^* + \tau_{ij}\, V_{i,*} = -T_{ij}$$

D'après (4-[C1-R*])

$$V_{i,*}\,(1-\Sigma_{j\in A+\backslash D+}\,\tau_{ij}) - \Sigma_{j\in A+\backslash D+}\, T_{ij} + \Sigma_{j\in A+\cap D+}\, V_j^* > 0$$

On considère l'égalité lorsque le second membre vaut un nombre positif fixé κ. D'où :

(6-[C1-R*]) $$V_{i,*} = (\kappa+\Sigma_{j\in A+\backslash D+}\, T_{ij} - \Sigma_{j\in A+\cap D+}\, V_j^*) \,/\, (1-\Sigma_{j\in A+\backslash D+}\,\tau_{ij})$$

Avec (5"-[C1-R*]), on obtient , pour tout $j\in A^+\backslash D^+$:

(7-[C1-R*]) $$V_j^* = -T_{ij} - \tau_{ij} \times (\kappa+\Sigma_{k\in A+\backslash D+}\, T_{ik} - \Sigma_{k\in A+\cap D+}\, V_k^*) \,/\, (1-\Sigma_{k\in A+\backslash D+}\,\tau_{ik})$$

On ajoute à l'ensemble D^- la variable i, et à D^+ l'ensemble $A^+\backslash D^+$. Si $D^-\neq I^-$, on retourne à une étape C1-R1-6[1], C1-R1-6[2] ou C1-R1-6[3].

C1-R*-8[2] -- Détermination de $V_{k,*}$ pour $k\in\Re_2\cap I^-\backslash D^-$ tel que $I^+(k)\subset D^+$:

Pour tout $k\in\Re_2\cap I^-\backslash D^-$ tel que $I^+(i)\subset D^+$, on peut déterminer la valeur de $V_{k,*}$. On pose la question Q2[C1-R*] pour déterminer le couple (A^+,A^-) pour lequel la relation (4-[C1-R*]) est satisfaite. D'après (4-[C1-R*]), on a :

$$V_{k,*} + \Sigma_{j\in A+}\, V_j^* > 0$$

On obtient :

$$V_{k,*} = \kappa - \Sigma_{j\in A+}\, V_j^*$$

On procède ensuite à la détermination des V_i pour $i \in \Re_3$:

C1-R*-3[3] – Définition des valeurs $R_{k,\bullet}$ pour $k \in I^-$: Cette étape est strictement identique à l'étape C1-R*-3[2].

C1-R*-6[3] -- Détermination de $i \in \Re_3 \backslash D^-$ de référence : Le questionnaire va se baser sur une variable particulière parmi $\Re_3 \backslash D^-$. Cette étape est identique à l'étape C1-R1-6.

C1-R*-7[3] -- Détermination de $V_{i,\bullet}$ et de V_j^* pour tout $j \in I^+(i) \backslash D^+$: Pour tout $j \in I^+(i) \backslash D^+$, on procède exactement comme pour le début de l'étape C1-R*-7[2]. Pour tout $j \in I^+(i) \backslash D^+$, on aboutit à la relation (5"-[C1-R*]).

La seconde relation correspondant au cas R3 donne pour tout $(A^+,A^-) \in I$ avec $i \in A^-$:

$$V_{i,\bullet}\,(1-\Sigma_{j\in A+\backslash D+}\,\tau_{ij}) - \Sigma_{j\in A+\backslash D+}\,T_{ij} + \Sigma_{j\in A+\cap D+}\,V_j^* \leq 0$$

Donc :

$$V_{i,\bullet} \leq (\Sigma_{j\in A+\backslash D+}\,T_{ij} - \Sigma_{j\in A+\cap D+}\,V_j^*) \,/\, (1-\Sigma_{j\in A+\backslash D+}\,\tau_{ij})$$

et :

$$V_{i,\bullet} \leq \wedge_{(A+,A-)\in I\,/\,i\in A-}\ (\Sigma_{j\in A+\backslash D+}\,T_{ij} - \Sigma_{j\in A+\cap D+}\,V_j^*) \,/\, (1-\Sigma_{j\in A+\backslash D+}\,\tau_{ij})$$

On prend l'égalité :

(8-[C1-R*])

$$V_{i,\bullet} = \wedge_{(A+,A-)\in I\,/\,i\in A-}\ (\Sigma_{j\in A+\backslash D+}\,T_{ij} - \Sigma_{j\in A+\cap D+}\,V_j^*) \,/\, (1-\Sigma_{j\in A+\backslash D+}\,\tau_{ij})$$

Pour le couple $(A^+,A^-) \in I$ réalisant le minimum, on a : $V_{i,\bullet} + \Sigma_{j\in A+}\, V_j^* = 0$. Ceci implique que pour ce couple, on a en particulier : $V_{i,\bullet} + \Sigma_{j\in A+}\, V_j^* > -1$. On en déduit que la première relation correspondant au cas R3 est satisfaite. En conséquence, $V_{i,\bullet}$ donné par (8-[C1-R*]) satisfait les conditions du cas R3.

Avec (5"-[C1-R*]), on obtient, pour tout $j \in I^+(i) \backslash D^+$:

$$\textbf{(9-[C1-R*])}\quad V_j^* = -\,T_{ij} - \tau_{ij} \times \wedge_{(A+,A-)\in I\,/\,i\in A-}\ (\Sigma_{j\in A+\backslash D+}\,T_{ij} - \Sigma_{j\in A+\cap D+}\,V_j^*) \,/\, (1-\Sigma_{j\in A+\backslash D+}\,\tau_{ij})$$

On ajoute à l'ensemble D^- la variable i, et à D^+ l'ensemble $I^+(i) \backslash D^+$. Si $D^- \neq I^-$, on retourne à une étape C1-R1-6[1], C1-R1-6[2] ou C1-R1-6[3].

C1-R*-8[3] -- Détermination de $V_{k,*}$ pour $k \in \Re_3 \cap I^- \backslash D^-$ tel que $I^+(k) \subset D^+$:

Pour tout $k \in \Re_3 \cap I^- \backslash D^-$ tel que $I^+(i) \subset D^+$, on peut déterminer la valeur de $V_{k,*}$. La seconde relation correspondant au cas R3 donne :

$$V_{k,*} \leq \wedge_{(A+,A-) \in I\,/\,k \in A-} -\Sigma_{j \in A+} V_j^*$$

Comme précédemment, on prend l'égalité :

$$\mathbf{V_{k,*} = \wedge_{(A+,A-) \in I\,/\,k \in A-} -\Sigma_{j \in A+} V_j^*}$$

Pour le couple $(A^+,A^-) \in I$ réalisant le minimum, on a : $V_{k,*} + \Sigma_{j \in A+} V_j^* = 0$. On en déduit que la première relation correspondant au cas R3 est satisfaite. En conséquence, $V_{k,*}$ donné par la formule précédente satisfait les conditions du cas R3.

On procède ensuite à la détermination des V_j pour $j \in I^+ \backslash D^+$, comme suit.

C1-R*-9 -- Détermination de V_j^* pour tout $j \in I^+ \backslash D^+$: A l'issue des étapes C1-R*-7, si $I^+ \neq D^+$, c'est forcément dû à un cas R2, c'est à dire à un couple $(A^+,A^-) \in I$ avec $j \in A^+$, pour lequel tous les $i \in A^-$ correspondent au cas R2. Soit donc $j \in I^+ \backslash D^+$. Soit $(A^+,A^-) \in I$ avec $j \in A^+$. On demande à l'expert, à l'image de l'étape C1-R1-2, un indice $i \in A^-$ sur lequel une question sera posée. On procède alors exactement comme au début de l'étape C1-R*-7[2]. On aboutit à la relation (5"-[C1-R*]). Cela donne l'expression de V_j^* :

(9-[C1-R*]) $\qquad \mathbf{V_j^* = -T_{ij} - \tau_{ij} \times V_{i,*}}$

On va examiner comment se passe la détermination des paramètres en dehors du cadre de la compensation.

C1-R*-10 -- Détermination de V_j^* pour un $j \notin I^+$: Cette étape est strictement identique à l'étape C1-R1-9.

C1-R*-11 -- Détermination de V_i au delà de $R_{i,*}$ pour $i \in \Re_1$: Dans le cadre d'une compensation du type R1, il faut s'assurer que plus aucune compensation ne soit possible en dessous(si ε_i=1)/au- delà(si ε_i=−1) d'une certaine valeur de R_i. C'est pour cette raison que l'on a vu qu'il est

nécessaire d'introduire un point $R_{l,**}$ en dessous(si $\varepsilon_l=1$)/au-delà(si $\varepsilon_l=-1$) de $R_{l,*}$. Cette étape est strictement identique à l'étape C1-R1-10.

C1-R*-12 – Détermination de $R_{k,*}$ et de $V_{k,*}$ pour $k\notin I^-$: Pour $k\notin I^-$, la variable R_k n'est jamais censée être compensée par d'autres variables. On suppose donc que les variables ne faisant pas a priori partie des variables censées être compensées d'après l'expert, appartiennent au cas R1, c'est-à-dire au cas le plus restrictif. On procède alors exactement comme dans l'étape C1-R1-11.

Pour déterminer les fonctions d'utilité en tout point pour I^+ et I^-, la méthode est similaire à ce qui est décrit ci-dessus en référence à la figure 15. On ne la décrira pas en détail. Il s'agit de généraliser les étapes C2-R1-6 et C2-R1-8. On cherche alors à déterminer V_i^k pour tout $i\in I^-$, $k\in\{-p'_i -1,\dots,-1\}$ et pour tout $i\in I^+$, $k\in\{1,\dots, p_i+1\}$. Ce sont les inconnues en question.

Soit $i,j\in N$ et $A\subseteq N\backslash\{i,j\}$. Soit R le vecteur dont les coordonnées sont les suivantes : $R_i=R_i^k$, R_j valeur non fixée, $R_q=R_q^{kq}$ pour tout $q\in A\backslash j$, et $R_q=s_q$ pour tout $q\in N\backslash(A\cup\{i,j\})$. On a $U(R) = V_i^k + V_j(R_j) + \Sigma_{q\in A\backslash\{j\}} V_q^{kq}$. Le vecteur R met donc en œuvre l'utilité V_i^k. Afin d'avoir une relation satisfaite par V_i^k, on cherche donc à avoir R_j tel que U(R)=0 ou U(R)= –1. On cherche donc des indices $\{k_q\}_{q\in A\backslash j}$ de telle sorte que lorsque R_j passe de $R_{j,*}$ à s_j, on soit sûr que U(R) traverse l'une des deux courbes de niveau 0 ou –1. On décrit ici la manière dont on détermine les indices $\{k_q\}_{q\in A\backslash j}$.

Pour chaque $i\in I^-$, $k\in\{-p'_i -1,\dots,-1\}$ et chaque $i\in I^+$, $k\in\{1,\dots, p_i+1\}$, on utilise cette technique pour déterminer une relation satisfaite par V_i^k. On commence par ceux pour lesquels on n'a pas besoin de chercher numériquement des indices $\{k_q\}_{q\in A\backslash j}$ (c'est-à-dire ceux pour lesquels on connaît a priori des $\{k_q\}_{q\in A\backslash j}$ pour lesquels U(R) traverse l'une des deux courbes de niveau 0 ou –1).

Pour effectuer la détermination du point particulier, la difficulté est que l'on ne connaît pas encore les valeurs des utilités V_q^{kq}. Dans ces conditions, comment déterminer les meilleurs indices $\{k_q\}_{q\in A\backslash j}$ de telle sorte que U(R) croise à coup sûr l'une des deux courbes de niveau ? L'idée est, à partir des éléments dont on dispose, de déterminer les meilleurs indices $\{k_q\}_{q\in A\backslash j}$ de telle sorte qu'il soit parfaitement possible que U(R) croise l'une des deux courbes de niveau, c'est-à-dire qu'il n'y ait aucune contre-indication d'après les éléments dont on dispose. Les éléments dont on dispose sont regroupés dans un ensemble noté Ψ. Il s'agit des relations dont on dispose sur les inconnues. On dénote par Ψ l'ensemble des égalités provenant des points particuliers déjà déterminés, et des relations suivantes provenant du type de compensation choisie:

- **Cas où** $\mathbf{i\in\Re_1}$. Pour tout $(A^+,A^-)\in I$ tel que $i\in A^-$, on a $V_{i,*}+\Sigma_{j\in A+} V_j^* \leq -1$. De plus, pour que $R_{i,*}$ corresponde à sa définition donnée précédemment, au moins l'une de ces inégalités doit être satisfaite avec une égalité. On modélise cela à l'aide d'un problème linéaire en nombres entiers. Cela donne :

  Pour tout $(A^+,A^-)\in I$ tel que $i\in A^-$:

  $$V_{i,*}+\Sigma_{j\in A+} V_j^* = -1-E_{i,A+}$$
  $$E_{i,A+} \geq 0$$
  $$\varepsilon_{i,A+} \in \{0,1\}$$
  $$\varepsilon_{i,A+} \leq E_{i,A+} / \delta$$
  $$\varepsilon_{i,A+} \geq (E_{i,A+} - \delta)/E_{max}$$
  $$\Sigma_{(A+,A-)\in I \text{ tel que } i\in A-} (1-\varepsilon_{i,A+}) \geq 1$$

  où δ est un nombre très petit (par exemple $\delta=10^{-8}$) et E_{max} est une borne supérieure a priori des $E_{i,A+}$ (par exemple $E_{max}=10^8$). Les variables $\varepsilon_{i,A+}$ sont entières. La relation $\varepsilon_{i,A+} \leq E_{i,A+} / \delta$ implique que $\varepsilon_{i,A+} = 0$ dès que $E_{i,A+} < \delta$. La relation $\varepsilon_{i,A+} \geq (E_{i,A+} - \delta)/E_{max}$ implique que $\varepsilon_{i,A+} = 1$ dès que $E_{i,A+} > \delta$. En gros, $\varepsilon_{i,A+} = 0$ si $V_{i,*}+\Sigma_{j\in A+} V_j^* = -1$ et $\varepsilon_{i,A+}$

$= 1$ si $V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^* < -1$. On en déduit que $\Sigma_{(A+,A-)\in I \text{ tel que } i\in A-} (1-\varepsilon_{i,A+})$ donne le nombre de $(A^+,A^-)\in I$ pour lesquels on a égalité dans $V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^* \leq -1$. La relation $\Sigma_{(A+,A-)\in I \text{ tel que } i\in A-} (1-\varepsilon_{i,A+}) \geq 1$ indique donc qu'au moins l'une de ces inégalités doit être satisfaite avec une égalité.

- **Cas où $i\in\Re_2$.** Pour tout $(A^+,A^-)\in I$ tel que $i\in A^-$ on a $V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^* > 0$. On écrit cela de la manière suivante : pour tout $(A^+,A^-)\in I$ tel que $i\in A^-$ on a $V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^* \geq \gamma$ (avec γ très petit). De plus, pour que $R_{i,*}$ corresponde à sa définition donnée précédemment, au moins l'une de ces inégalités doit être satisfaite avec une égalité. On modélise cela à l'aide d'un problème linéaire en nombres entiers. Cette façon de faire est similaire à celle du cas précédent.

  Pour tout $(A^+,A^-)\in I$ tel que $i\in A^-$:

  $$V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^* = \gamma + E_{i,A+}$$
  $$E_{i,A+} \geq 0$$
  $$\varepsilon_{i,A+} \in \{0,1\}$$
  $$\varepsilon_{i,A+} \leq E_{i,A+} / \delta$$
  $$\varepsilon_{i,A+} \geq (E_{i,A+} - \delta)/E_{max}$$

  $$\Sigma_{(A+,A-)\in I \text{ tel que } i\in A-} (1-\varepsilon_{i,A+}) \geq 1$$

- **Cas où $i\in\Re_3$.** On n'impose aucune condition supplémentaire autre que les conditions sur $\Re_3$. Cela donne :

  Pour tout $(A^+,A^-)\in I$ tel que $i\in A^-$:

  $$-1 < V_{i,*} + \Sigma_{j\in A+} V_j^* \leq 0$$

  On a vu précédemment que :

  $\exists R_j\in[s_j,R_j^*]$ tel que $U(R) = 0 \Leftrightarrow V_i^k \in [-V_j(R_j) - \Sigma_{q\in A} V_q^{kq} , -\Sigma_{q\in A} V_q^{kq}]$ (1)

  $\exists R_j\in[s_j,R_j^*]$ tel que $U(R) = -1 \Leftrightarrow V_i^k \in [-1-V_j(R_j) - \Sigma_{q\in A} V_q^{kq} , -1-\Sigma_{q\in A} V_q^{kq}]$ (2)

On souhaite donc que (1) ou (2) soit satisfaite. Soit :

$L' = \{ (v_j^*, v_i^k, \{v_q^{kq}\}_{q\in A})$ tel que $\Psi \cup \{V_j^* = v_j^*\} \cup \{V_i^k = v_i^k\} \cup \{V_q^{kq} = v_q^{kq}\}_{q\in A} \cup \{$ (1) ou (2) $\} \neq \varnothing \}$

$L = \{ (v_j^*, \{v_q^{kq}\}_{q\in A})$ tel que $\exists\, v_i^k$ avec $(v_j^*, v_i^k, \{v_q^{kq}\}_{q\in A}) \in L \}$

L'ensemble L fournit les valeurs des variables $v_j^*, v_i^k, \{v_q^{kq}\}_{q\in A}$ compatibles avec Ψ, et (1) ou (2). Autrement dit, si $L \neq \varnothing$ alors (1) ou (2) sera réalisable et U(R) coupera l'une des deux courbes de niveau 0 ou –1 pour une valeur de R_j. On veut que $L \neq \varnothing$. Pour aller plus loin, on veut maximiser la plage des v_i^k possibles. En effet, plus il y a des valeurs de V_i^k possibles, plus on aura de marge sur (1) ou (2). Soit :

$$r_L = \wedge_{(vj^*,\{vqkq\}q\in A)\in L} \left(\vee_{(vj^*,vik,\{vqkq\}q\in A)\in L'} V_i^k - \wedge_{(vj^*,vik,\{vqkq\}q\in A)\in L'} V_i^k \right)$$

On veut donc choisir $\{k_q\}_{q\in A}$ de sorte à maximiser r_L. Ce nombre n'est pas facile à calculer. On en cherche une approximation simple à calculer.

Soit :

$$\underline{V}_j^* = \wedge_{vj^* \text{ tel que } \Psi\cup\{Vj^*=vj^*\}\neq\varnothing} V_j^* \quad \text{et} \quad \overline{V}_j^* = \vee_{vj^* \text{ tel que } \Psi\cup\{Vj^*=vj^*\}\neq\varnothing} V_j^*$$

$$\underline{V}_i^k = \wedge_{vik \text{ tel que } \Psi\cup\{Vik=vik\}\neq\varnothing} V_i^k \quad \text{et} \quad \overline{V}_i^k = \vee_{vik \text{ tel que } \Psi\cup\{Vik=vik\}\neq\varnothing} V_i^k$$

$$\underline{\lambda} = \wedge_{\{vqkq\}q\in A \text{ tel que } \Psi\cup\{Vqkq=vqkq\}q\in A \neq\varnothing} \Sigma_{q\in A} V_q^{kq}$$

$$\text{et} \quad \overline{\lambda} = \vee_{\{vqkq\}q\in A \text{ tel que } \Psi\cup\{Vqkq=vqkq\}q\in A \neq\varnothing} \Sigma_{q\in A} V_q^{kq}$$

Soit :

$M' = \{ (v_j^*, v_i^k, \{v_q^{kq}\}_{q\in A})$ tel que $v_j^* \in [\underline{V}_j^*, \overline{V}_j^*]$, $v_i^k \in [\underline{V}_i^k, \overline{V}_i^k]$, $\Sigma_{q\in A} V_q^{kq} \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}]$ et (1) ou (2) $\}$

$M = \{ (v_j^*, \{v_q^{kq}\}_{q\in A})$ tel que $\exists\, v_i^k$ avec $(v_j^*, v_i^k, \{v_q^{kq}\}_{q\in A}) \in M \}$

On a $L' \subseteq M'$ et $L \subseteq M$. M et M' sont donc des sur-approximations des ensembles L et L'. Soit :

$$r_M = \wedge_{(vj^*,\{vqkq\}q\in A)\in M} \left(\vee_{(vj^*,vik,\{vqkq\}q\in A)\in M'} V_i^k - \wedge_{(vj^*,vik,\{vqkq\}q\in A)\in M'} V_i^k \right)$$

Comme $L' \subseteq M'$ et $L \subseteq M$, il vient :

$r_M \geq r_L$

Le nombre r_M est très facile à calculer. En effet, on pose :

$\rho = 0$ si l'on considère la relation (1)

$\rho=1$ si l'on considère la relation (2)

Tout d'abord, on remarque que :

$r_M = \min \{ r(v_j^*,\lambda),\ v_j^* \in [\underline{V}_j^*, \overline{V}_j^*],\ \lambda \in [\underline{\lambda}, \overline{\lambda}] \}$

où :

$r(v_j^*,\lambda) = | [\underline{V}_i^k, \overline{V}_i^k] \cap [-v_j^*-\lambda-\rho, -\lambda-\rho] |$

Pour un intervalle $T=[T_0,T_1]$, la longueur $|T|$ de cet intervalle est définie par $T_1 - T_0$. On a :

$r_M = 0 \Leftrightarrow \overline{V}_i^k \leq -\underline{V}_j^* - \underline{\lambda}$ ou $\underline{V}_i^k \geq -\overline{\lambda}$

De plus, il est facile de voir que :

$r_M = r(\underline{V}_j^*, \underline{\lambda}) \wedge r(\underline{V}_j^*, \overline{\lambda})$

Les indices $\{k_q\}_{q \in A+\backslash j}$ considérés sont ceux maximisant r_L (si l'on souhaite résoudre le problème exact) ou r_M (si l'on se contente du problème approché).

REVENDICATIONS

1. - Procédé de prise de décision par un système expert en l'absence de règles clairement identifiables, selon lequel ce système établit des règles de prise de décision comportant au moins deux variables pour chacune desquelles au moins une limite n'est pas stricte, caractérisé par le fait que ce système pose des questions en vue de permettre au système d'introduire une condition de compensation dans les règles non clairement identifiables, que l'expert détermine avec le système, pour chaque paramètre d'une condition compensatoire, au moins un point particulier appartenant à une frontière de compensation et relié au paramètre, que le système en déduit la valeur des paramètres, qu'il applique l'ensemble des règles et qu'il en déduit la décision.

2. -Procédé selon la revendication 1, caractérisé par le fait que la compensation est soit vérifiée soit non vérifiée, et qu'il n'y a qu'une seule frontière de compensation.

3. -Procédé selon la revendication 1, caractérisé par le fait que les conditions dans les prémisses sont rendues floues par l'expert, que la compensation peut être plus ou moins vérifiée, qu'il y a deux frontières de compensation, que l'application des règles permet de calculer un degré de possibilité sur l'ensemble des alternatives possibles, et que le système interprète les distributions de possibilité finales pour en déduire la décision.

4. -Procédé selon l'une des revendications 1 à 3, caractérisé par le fait que la condition de compensation s'écrit comme l'agrégation par une simple somme non pondérée de fonctions d'utilité sur chaque variable, que les fonctions d'utilité sont affines par morceaux, que l'expert fournit les abscisses des points délimitant les parties affines, et que

les paramètres de la condition de compensation sont les ordonnées de ces points.

5. -Procédé selon la revendication 4, caractérisé par le fait que l'expert fournit en relatif par rapport aux valeurs extrêmes les ordonnées des fonctions d'utilité pour tous points délimitant les parties affines hormis les deux points extrêmes et le seuil, que l'utilité au seuil est nulle et que les paramètres de la condition de compensation sont les ordonnées des fonctions d'utilité pour les points extrêmes.

6. -Procédé selon la revendication 4, caractérisé par le fait que l'utilité au seuil est nulle et que les paramètres de la condition de compensation sont les ordonnées des fonctions d'utilité pour tous points délimitant les parties affines hormis le seuil.

7. -Procédé selon l'une des revendications 5 à 6, caractérisé par le fait que les points particuliers sont tels que toutes leur coordonnées suivant les variables sauf une sont égales à une des valeurs délimitant les parties affines des fonctions d'utilité, que le système demande à l'expert de fournir la valeur suivant la coordonnée non fixée de telle sorte que le point particulier se situe exactement sur une frontière de compensation, que le système détermine un point caractéristique pour toute variable et toute valeur délimitant les parties affines de la fonction d'utilité sur cette variable telle que la coordonnée du point caractéristique suivant la variable soit égale à la valeur et telle que l'ordonnée de cette valeur soit un paramètre, que les relations que l'on a sur les points caractéristiques aboutissent à un ensemble d'équations dont les inconnues sont les paramètres, et que le système résout cet ensemble avec une méthode classique.

8. -Procédé selon la revendication 7, caractérisé par le fait que l'expert détermine pour chaque variable le type de compensation à laquelle elle appartient, que cela fournit un ensemble d'équations et d'inéquations, qu'il faut ajouter les équations issues des points

caractéristiques, et que le système résout ce système selon une méthode classique.

9. -Procédé selon la revendication 7, caractérisé par le fait que toutes les variables correspondent à une compensation du type pour lequel , pour chaque variable R_i, il existe une valeur de R_i au-delà ou en deça de laquelle plus aucune compensation n'est possible quelle que soit la valeur suivant les autres variables, que l'expert fournit en valeurs relatives par rapport aux valeurs extrêmes les ordonnées des fonctions d'utilité pour tous points délimitant les parties affines hormis les deux points extrêmes et le seuil, que l'utilité au seuil est nulle, que les paramètres de la condition de compensation sont les ordonnées des fonctions d'utilité pour les points extrêmes, que les conditions dans les prémisses sont rendues floues par l'expert, que la compensation peut être plus ou moins vérifiée, que les points caractéristiques sont tels que la composante suivant une variable bien satisfaite corresponde à la valeur maximale suivant cette variable, que la composante suivant une variable mal satisfaite soit libre, que le système demande à l'expert de fournir la valeur suivant la coordonnée libre de telle sorte que le point particulier se situe exactement sur une frontière de compensation et que toutes les autres composantes soient fixées aux seuils.

10. -Procédé selon la revendication 1, caractérisé par le fait que la base de règles correspond à un arbre de décision.

11. -Procédé selon la revendication 3, caractérisé par le fait que la base de règles correspond à un arbre de décision, et qu'une seule alternative peut être parfaitement possible dans la distribution de possibilités finale.

12. -Procédé selon la revendication 11, caractérisé par le fait que le système met en évidence dans l'arbre de décision les couples de conditions complémentaires, y compris les conditions de compensation, que le système traite les conditions complémentaires

en même temps en séparant le noyau de leur ensemble flou par un nombre très petit.

13. -Procédé selon l'une des revendications 11 à 12, caractérisé par le fait que le système commence par introduire formellement la compensation, puis que le système introduit formellement le flou, puis que le système spécifie les conditions floues non compensatoires, et enfin que le système spécifie les conditions floues compensatoires.

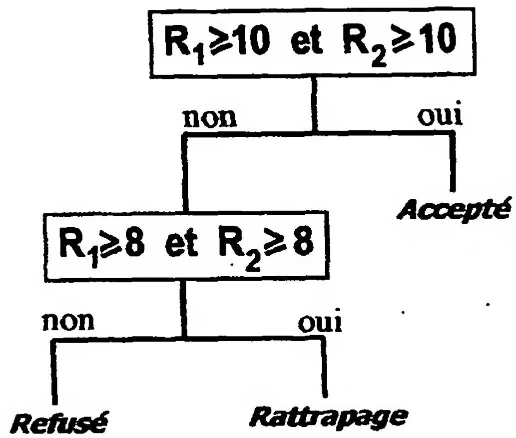

$R_1 \geq 10$ et $R_2 \geq 10$
non
oui
Accepté
$R_1 \geq 8$ et $R_2 \geq 8$
non
oui
Refusé
Rattrapage

FIG.1

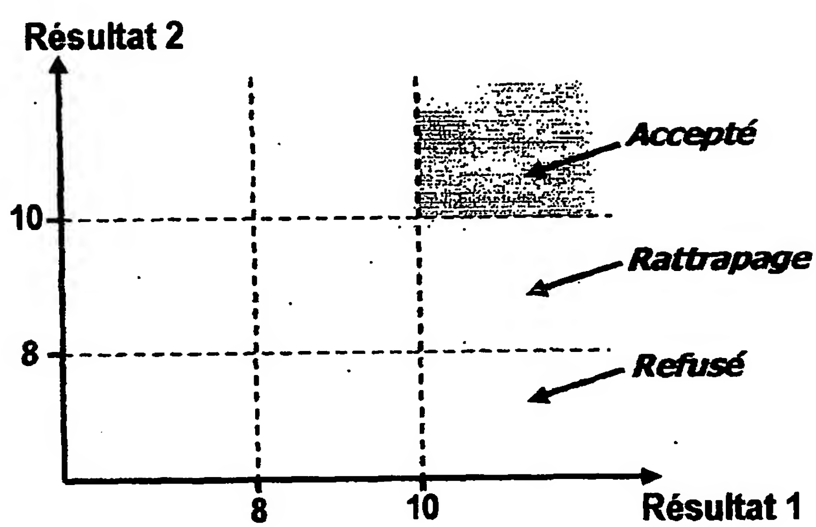

Résultat 2
10
8
Accepté
Rattrapage
Refusé
8
10
Résultat 1

FIG.2

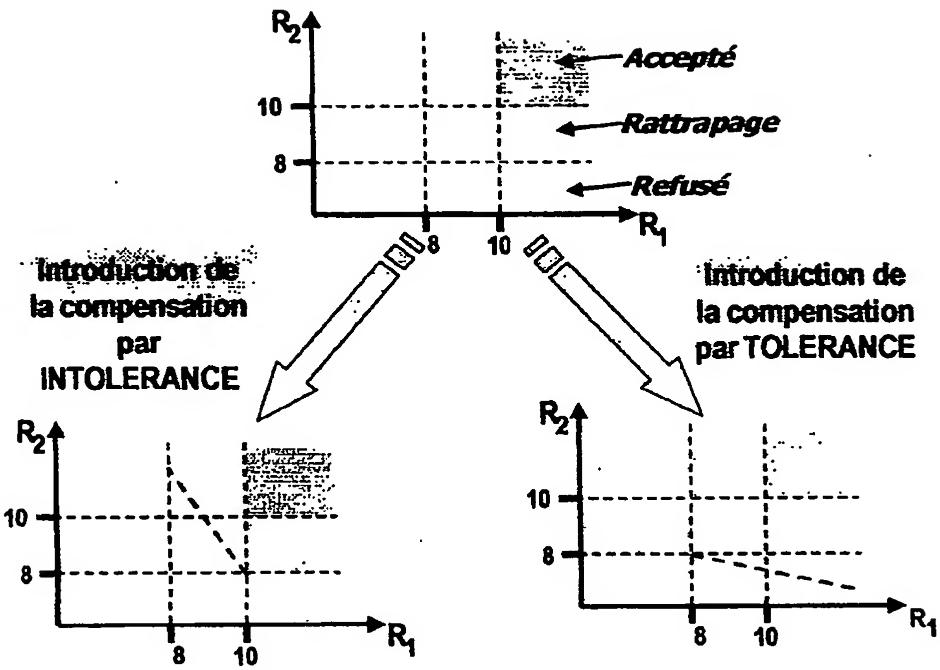

R2
10
8
R1
8
10
Accepté
Rattrapage
Refusé
Introduction de
la compensation
par
INTOLERANCE
Introduction de
la compensation
par TOLERANCE
R2
10
8
8
10
R1
R2
10
8
8
10
R1

FIG. 3

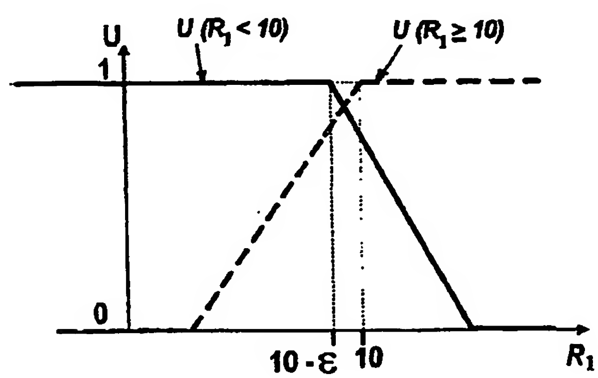

U
1
0
U (R1 < 10)
U (R1 ≥ 10)
10 - ε
10
R1

FIG.4

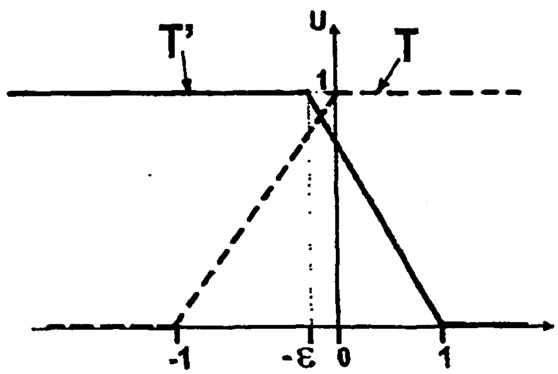

T'
U
T
1
-1
-ε
0
1

FIG.5

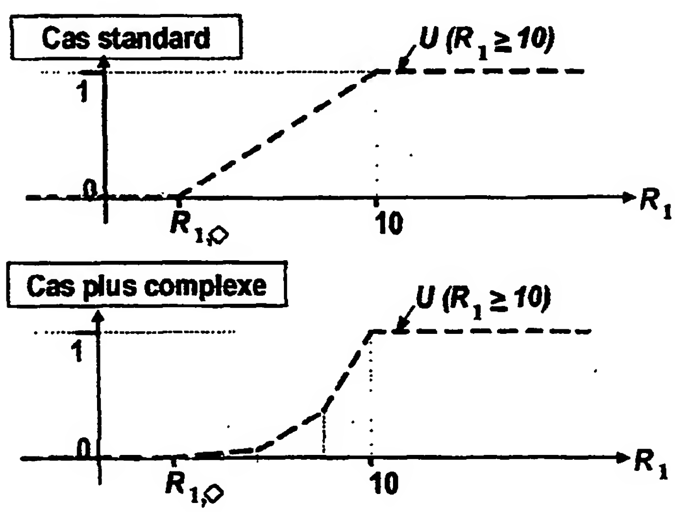
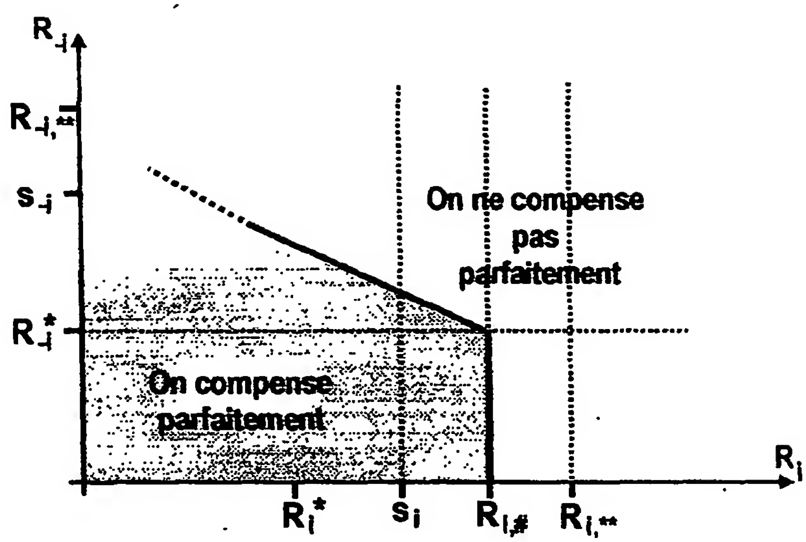
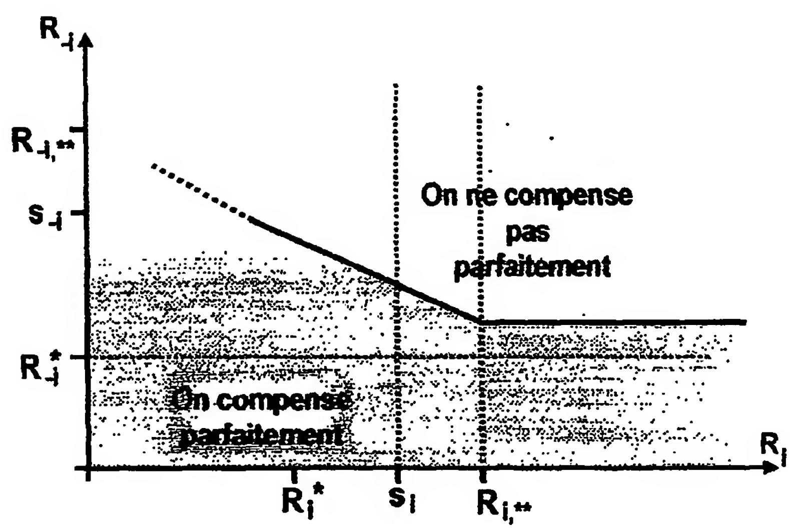

Cas standard
U (R1 ≥ 10)
1
0
R1,◇
10
R1
Cas plus complexe
U (R1 ≥ 10)
1
0
R1,◇
10
R1

FIG.6



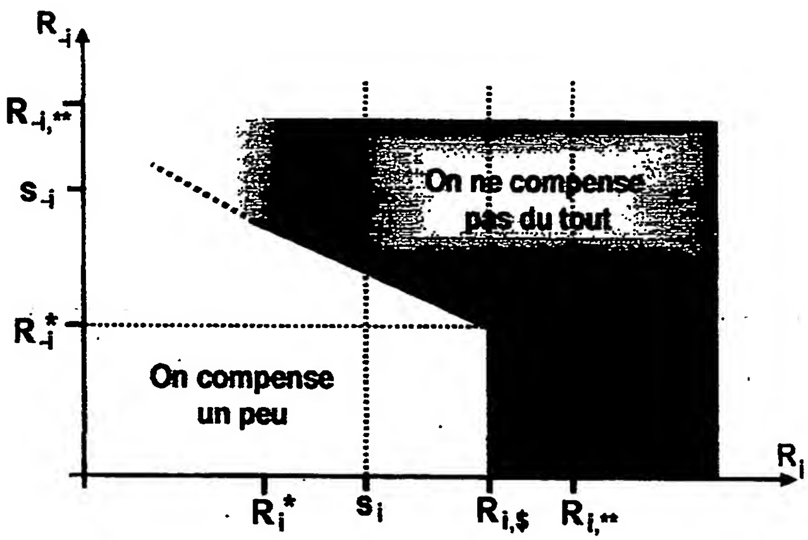
R_{-i}
$R_{-i,**}$
s_{-i}
R_{-i}^*
On ne compense pas parfaitement
On compense parfaitement
R_i
R_i^*
s_i
$R_{i,\#}$
$R_{i,**}$

FIG.7



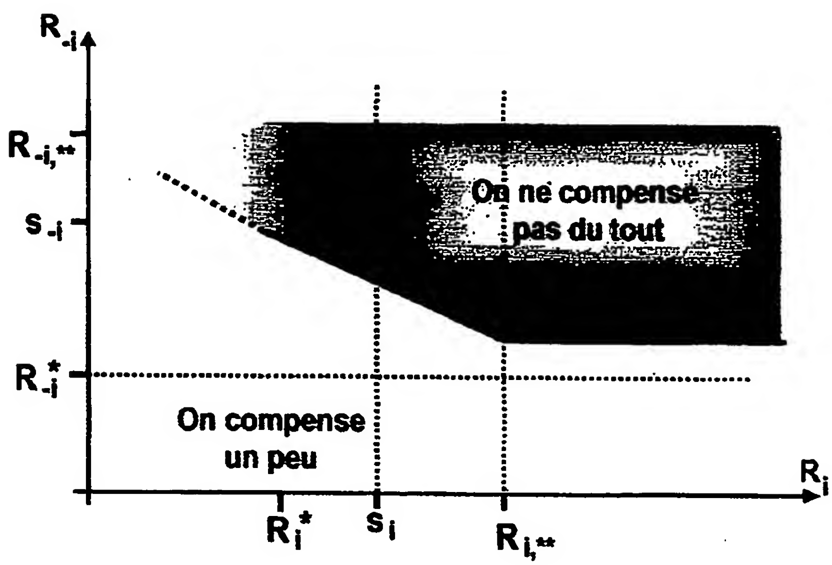
R_{-i}
$R_{-i,**}$
s_{-i}
R_{-i}^*
On ne compense pas parfaitement
On compense parfaitement
R_i
R_i^*
s_i
$R_{i,**}$

FIG.8



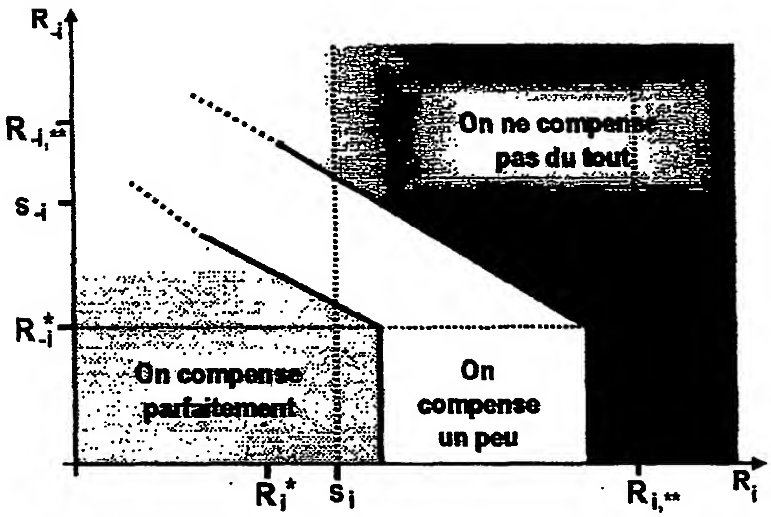
R-i
R-i,**
s-i
R*-i
On ne compense
pas du tout
On compense
un peu
Ri
R*i
si
Ri,$
Ri,**

FIG.9



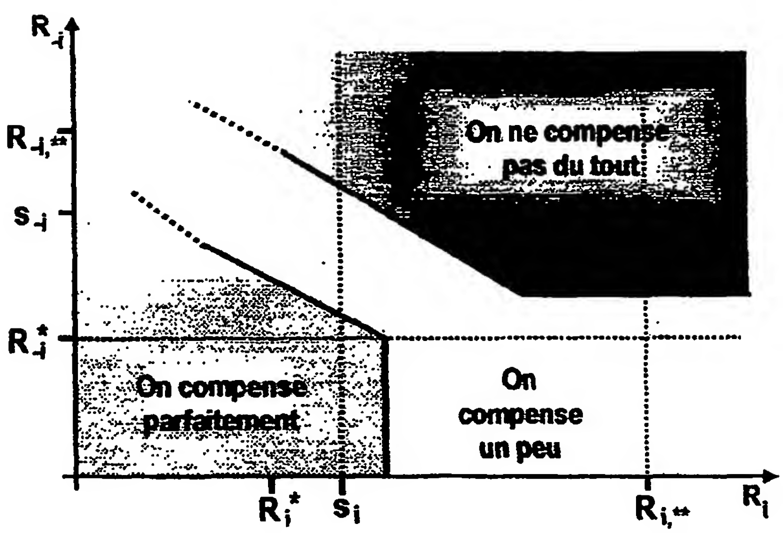
R-i
R-i,**
s-i
R*-i
On ne compense
pas du tout
On compense
un peu
Ri
R*i
si
Ri,**

FIG.10



R_{-i}
$R_{-i,**}$
s_{-i}
R_{-i}^*
On ne compense pas du tout
On compense parfaitement
On compense un peu
R_i^*
s_i
$R_{i,**}$
R_i

FIG.11



R_{-i}
$R_{-i,**}$
s_{-i}
R_{-i}^*
On ne compense pas du tout
On compense parfaitement
On compense un peu
R_i^*
s_i
$R_{i,**}$
R_i

FIG.12

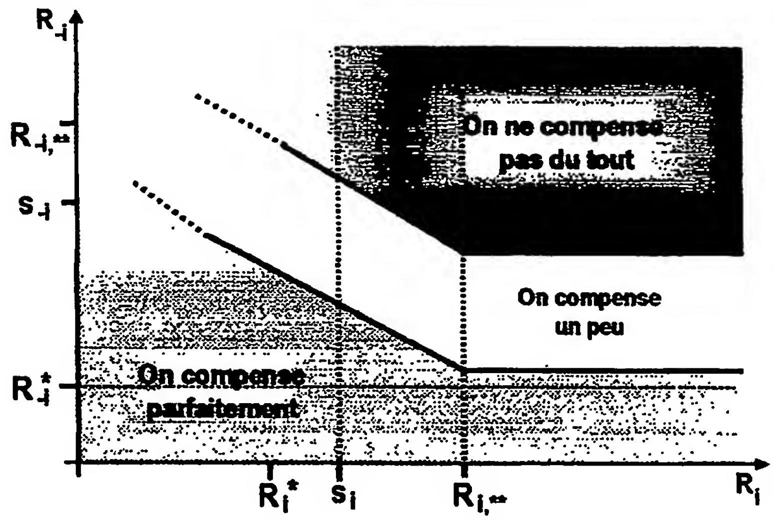

R-i
R-i,**
s-i
R-i*
On ne compense pas du tout
On compense un peu
On compense parfaitement
Ri*
si
Ri,**
Ri

FIG.13

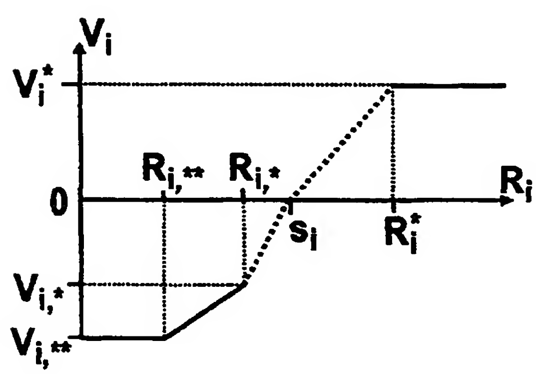

Vi
Vi*
Ri,**
Ri,*
Ri
0
si
Ri*
Vi,*
Vi,**

FIG.14

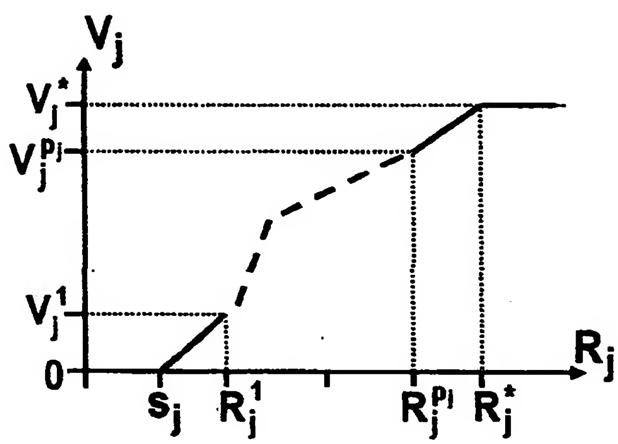

V_j
V_j^*
$V_j^{p_j}$
V_j^1
0
R_j
s_j
R_j^1
$R_j^{p_j}$
R_j^*

FIG.15

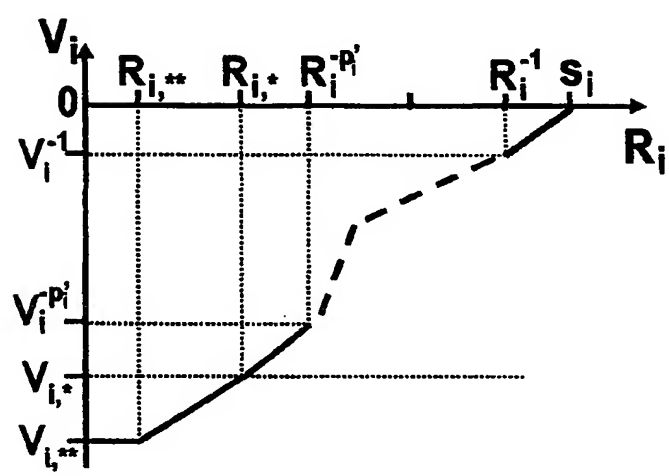

V_i
$R_{i,**}$
$R_{i,*}$
$R_i^{-p_i'}$
R_i^{-1}
s_i
0
R_i
V_i^{-1}
$V_i^{-p_i'}$
$V_{i,*}$
$V_{i,**}$

FIG.16